Acad. **Nicolae Teodorescu**
Prof. dr. **Valter Olariu**

Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale

Volumul III

Ecuațiile fizicii matematice

Editura tehnică
București — 1980

Cel de-al treilea volum care încheie lucrarea privind teoria ecuațiilor diferențiale și a ecuațiilor cu derivate parțiale cuprinde cîteva dintre metodele clasice și moderne referitoare la rezolvarea problemelor frecvent întîlnite în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale.

Cuprinsul acestui volum poate fi util studenților matematicieni, fizicieni, din institutele tehnice precum și matematicienilor, inginerilor etc. care au de rezolvat în activitatea lor astfel de probleme.

Cuprins

1. Teoria generală a ecuțiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea 7

1.1. Modelarea matematică și teoria ecuațiilor fizicii matematice 7
1.2. Rezolvarea problemei Cauchy. Caracteristici 25
1.3. Teorema de existență și unicitate Cauchy-Kovalevskaia 42
1.4. Teorema de unicitate Holmgren 66
1.5. Clasificarea ecuațiilor și sistemelor de ecuații cu derivate parțiale 70
Exerciții și completări 90

2. Metode de integrare în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale de ordin superior. 101

2.1. Metode elementare de integrare 101
2.2. Metode de liniarizare a ecuațiilor cu derivate parțiale 116
2.3. Transformările integrale și teoria ecuațiilor liniare cu derivate parțiale 126
2.4. Teoria distribuțiilor și integrarea ecuațiilor liniare cu derivate parțiale coeficienți constanți 149

3. Ecuații de tip eliptic 235

3.1. Definiții. Formule fundamentale 235
3.2. Soluții slabe pentru ecuații uniform eliptice de ordinul al doilea 242
3.3. Soluția elementară a ecuației Laplace și consecințele ei 259
3.4. Teoria potențialului 290

4. Ecuații de tip parabolic 312

4.1. Prima problemă mixtă pentru ecuații de tip parabolic normal . . . 312
4.2. Teoria semigrupurilor și problema Cauchy 321
4.3. Soluția elementară a ecuației căldurii și consecințele sale 332
Exerciții 342

5. Ecuații de tip hiperbolic 346

5.1. Soluții slabe pentru ecuații de tip hiperbolic 346
5.2. Soluția elementară a ecuației undelor și consecințele ei 359
5.3. Metoda lui Riemann 399
Exerciții 411

Postfață 414

Bibliografie 415

CAPITOLUL 1

Teoria generală a ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea

1.1. Modelarea matematică și teoria ecuațiilor fizicii matematice

În volumele anterioare s-au dat multe exemple în care teoria ecuațiilor sau sistemelor diferențiale sau a ecuațiilor cu derivate parțiale servea nemijlocit la determinarea efectivă a unor procese reale deduse din practică; acest volum, dedicat teoriei ecuațiilor liniare cu derivate parțiale de ordinul al doilea continuă acest proces de modelare, limitîndu-se la unele situații mai simple care însă au avantajul că pot fi tratate pînă la capăt, putîndu-se obține chiar forma explicită a funcțiilor care intervin în modelarea în cauză.

1.1.1. Modele geometrice

1.1.1.1. *Problema lui Plateau.* Una din cele mai simple situații, în care intervenția ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea este imediată, se referă la determinarea suprafeței avînd aria minimă dintre toate suprafețele din spațiu care se sprijină pe o curbă închisă dată γ. În practică, asemenea situații apar în teoria peliculelor subțiri (de exemplu de săpun) care se sprijină pe un inel, cînd se caută poziția de echilibru a acestora și această circumstanță este cunoscută sub numele de *problema lui Plateau.*

Problema lui Plateau este una din situații în care obținerea modelului matematic este imediată, dar găsirea efectivă a soluției conduce la calcule extrem de complicate.

Presupunem că ne situăm în spațiul $\mathbb{R}^3$ iar suprafața se caută de forma

$$z = f(x, y),\ f:\ D_2 \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

f fiind de o clasă convenabilă ($f \in C^2(D_2)$). Deoarece aria acestei suprafeţe este dată de

$$A(f) = \iint_{D_2} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy, \tag{1.2}$$

cu notaţiile $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, condiţia din enunţ,

$$A(f) \to \min$$

conduce la o problemă variaţională, soluţia trebuind să fie căutată printre extremalele funcţionalei $A(f)$.

Ecuaţia Euler-Ostrogradski

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial f_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial f_y}\right) - \frac{\partial L}{\partial f} = 0$$

cu $L = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right) = 0 \tag{1.3}$$

sau, dezvoltat,

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0, \qquad (x, y) \in D_2. \tag{1.3'}$$

Se obţine o ecuaţie cu derivate parţiale (neliniară) de ordinul al doilea, care trebuie integrată în condiţia la limită

$$f(x, y) = h(x, y) \text{ dacă } (x, y) \in \partial D_2,$$

domeniul D_2 fiind astfel încît ∂D_2 este proiecţia curbei γ din spaţiu pe care se sprijină suprafaţa $z = f(x, y)$; funcţia h este cunoscută prin însăşi problema în cauză.

În locul coordonatelor carteziene x, y, z, $z = f(x, y)$, se utilizează reprezentarea parametrică

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in G_2, \tag{1.1'}$$

$x, y, z \in C^2(G_2)$, presupunînd domeniul G_2 astfel ales în planul variabilelor (u, v) încît dacă $(u, v) \in \partial G_2$ să avem $(x, y, z) \in \gamma$.

Deoarece aria suprafeţei este exprimabilă prin

$$A(x, y, z) = \iint_{G_2} \sqrt{(EG - F^2)(u, v)}\, du\, dv, \tag{1.2'}$$

unde

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \tag{1.4}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

se obţine o problemă variaţională $A \to \min$ în care apar trei funcţii necunoscute x, y şi z (depinzînd de variabilele u şi v); în acest caz, se va obţine sistemul Euler-Ostrogradski

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial L}{\partial x_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial L}{\partial x_v}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial L}{\partial y_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial L}{\partial y_v}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial L}{\partial z_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial L}{\partial z_v}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

dacă $L = \sqrt{EG - F^2}$. Parametrii u şi v nu sînt unic determinaţi iar din enunţul problemei se deduce că sistemul anterior trebuie să fie invariant faţă de orice modificare a parametrilor (care definesc evident aceeaşi suprafaţă); se poate alege această modificare a parametrilor u şi v pentru a avea

$$E = G,\ F = 0, \tag{1.6}$$

deci

$$L = E = G = \frac{1}{2}(E + G) = \frac{1}{2}(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + z_v^2),$$

ceea ce face ca sistemul Euler-Ostrogradski să aibă o formă mai simplă. În acest mod se deduce că funcţiile $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ şi $z = z(u, v)$ trebuie să fie funcţii armonice în G_2:

$$\Delta_2 x(u, v) = 0, \quad \Delta_2 y(u, v) = 0, \quad \Delta_2 z(u, v) = 0;$$

acest sistem trebuie să fie compatibil cu condiţiile (1.6) care, în baza egalităţilor (1.4), se va scrie

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0 \qquad (1.6')$$

şi poate fi considerat ca un sistem cu două ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi. Dar consideraţii simple arată că de fapt restricţiile (1.6′) pot fi interpretate ca nişte condiţii la limită, fiind suficient ca ele să fie verificate pe ∂G_2. Într-adevăr, cum orice funcţie armonică este partea reală a unei funcţii olomorfe (vezi vol. II, cap. 5), vom putea scrie, introducînd variabila complexă $w = u + iv$:

$$x(u, v) = \operatorname{Re} F_1(w), \quad y(u, v) = \operatorname{Re} F_2(w), \quad z(u, v) = \operatorname{Re} F_3(w).$$

Calculînd derivatele F_1', F_2', F_3' (utilizînd condiţiile Cauchy-Riemann), vom găsi

$$F_1'(w) = \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v}, \quad F_2'(w) = \frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v}, \quad F_3'(w) = \frac{\partial z}{\partial u} - i\frac{\partial z}{\partial v}$$

şi deci rezultă egalitatea

$$H(w) = [F_1'(w)]^2 + [F_2'(w)]^2 + [F_3'(w)]^2 = E - G - 2iF,$$

dacă se ţine seama de (1.4); cum H este olomorfă în G_2 odată cu F_1, F_2 şi F_3, condiţiile (1.6′) arată că $H(w) = 0$, $w \in G_2$, ceea ce este posibil dacă $\operatorname{Re} H = 0$ pe ∂G_2 şi $\operatorname{Im} H = 0$ într-un punct din $\bar{G}_2$; astfel condiţiile (1.6′) apar ca nişte condiţii la limită. Avem $\operatorname{Re} H = E - G$, $\operatorname{Im} H = -2F$ iar $E = G$ şi $F = 0$ vor coincide cu $\operatorname{Re} H = 0$ (pe o curbă din G_2 care poate fi ∂G_2) şi $\operatorname{Im} H = 0$ într-un punct din G_2.

1.1.1.2. *Suprafeţe avînd curbura medie cunoscută.* În $\mathbb{R}^3$, pentru o suprafaţă dată parametric

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

$x, y, z \in C^2(G_2)$, se pot defini cele două forme fundamentale ale acestei suprafeţe; prima formă fundamentală coincide cu tensorul metric în variabilele u şi v, deci

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

iar a doua formă fundamentală Φ se scrie

$$\Phi = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2,$$

unde $L = \dfrac{D}{\sqrt{EG - F^2}}$, $M = \dfrac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}$, $N = \dfrac{D''}{\sqrt{EG - F^2}}$,

$$D = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{uu} \\ y_u & y_v & y_{uu} \\ z_u & z_v & z_{uu} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{uv} \\ y_u & y_v & y_{uv} \\ z_u & z_v & z_{uv} \end{vmatrix}, \quad D'' = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{vv} \\ y_u & y_v & y_{vv} \\ z_u & z_v & z_{vv} \end{vmatrix}$$

cu notaţiile $x_{uu} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, . . ., $z_{vv} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

Cu ajutorul funcţiilor E, F, G, $[D, D'$ şi D'' se defineşte ecuaţia de gradul al doilea

$$(EG - F^2)k^2 - (EN - 2FM + GL)k + (LN - M^2) = 0,$$

ale cărei rădăcini k_1 şi k_2 se numesc *curbura minimă şi curbura maximă* a suprafeţei în punctul considerat [$k_1 = k_1(u, v)$, $k_2 = k_2(u, v)$ şi aceste curburi se obţin intersectînd suprafaţa cu două plane normale convenabil alese]. Se notează

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad K = k_1 \cdot k_2;$$

H se numeşte *curbura medie* a suprafeţei [în punctul (u, v)] iar K este *curbura lui Gauss* (în acelaşi punct). Aşadar, folosind relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi,

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \qquad (1.7)$$

Dacă se presupune suprafaţa în cauză astfel încît curbura ei medie H să fie dată (ca o funcţie de u şi v), atunci se obţine o ecuaţie cu trei funcţii necunoscute $x(u, v)$, $y(u, v)$ şi $z(u, v)$; presupunînd $x = u$, $y = v$, $z = z(u, v) = z(x, y)$, din (1.7), deoarece

$$E = 1 + z_x^2,\ F = z_x z_y,\ G = 1 + z_y^2,\ EG - F^2 = 1 + z_x^2 + z_y^2,$$

$$D = z_{xx},\ D' = z_{xy},\ D'' = z_{yy},$$

se deduce

$$\frac{(1 + z_x^2)\, z_{yy} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_y^2)\, z_{xx}}{2(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}} = H(x, y)$$

şi comparînd cu (1.3), rezultă că problema lui Plateau va coincide cu problema aflării suprafeţelor din $\mathbb{R}^3$ care au curbura medie nulă în orice punct al ei. Cu această ocazie rezultă şi faptul că pentru a construi suprafeţele din $\mathbb{R}^3$ care au curbura medie cunoscută $H = H(x,y)$ trebuie integrată o ecuaţie (neliniară) cu derivate parţiale de ordinul al doilea, la care se adaugă eventual şi o condiţie la limită : $z(x,y)$ să fie cunoscut pe ∂D_2. Dacă γ este curbă plană, problema lui Plateau se poate considera rezolvată, deoarece singurele suprafeţe cu curbură medie constantă H_0 fiind sferele cu raza $R = \dfrac{2}{H_0}$, pentru $H_0 = 0$ se obţine un plan; dar cazul în care γ este o curbă plană nu este un caz important în practică.

1.1.1.3. *Suprafeţe avînd curbura lui Gauss dată.* Exact la fel ca şi în cazul tratat la 1.1.1.2, presupunînd curbura lui Gauss a suprafeţei $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_2$ cunoscută, deci $K = K(x, y)$, rezultă că pentru a determina aceste suprafeţe trebuie integrată ecuaţia cu derivate parţiale

$$z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = k(x, y)\,(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}$$

la care, eventual, se poate ataşa o problemă Dirichlet : $z(x, y)$ să fie cunoscut pe ∂D_2.

Se pot determina suprafeţe din $\mathbb{R}^2$ pentru care este cunoscută combinaţia $a(x, y)H(x, y) + b(x, y)K(x, y)$, a şi b fiind funcţii cunoscute ca şi curburile H şi K; de asemenea, a, b, H şi K se pot presupune funcţii şi de funcţia necunoscută z. În acest mod se introduc în studiu ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea de forma

$$A(x, y, z, z_x, z_y)(z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2) + B(x, y, z, z_x, z_y)\, z_{xx} +$$

$$+ 2C(x, y, z, z_x, z_y)\, z_{xy} + D(x, y, z, z_x, z_y)\, z_{yy} + E(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

numite *ecuaţii Monge-Ampère*; la aceste ecuaţii se pot adăuga şi condiţii la limită de tip Dirichlet.

În baza consideraţiilor de pînă acum, se deduce că studiul ecuaţiilor Monge-Ampère are un pronunţat caracter geometric.

1.1.2. Teoria cîmpurilor vectoriale şi ecuaţiile cu derivate parţiale

Dacă într-un domeniu $D_3 \subset \mathbb{R}^3$ sînt definite trei funcţii de o clasă dată f_1, f_2, f_3, atunci aceste funcţii pot fi considerate ca fiind componetele unui cîmp vectorial din D_3 :

$$\mathbf{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\,\mathbf{k}.$$

Dacă există $u \in C^1(D_3)$ astfel încît

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} u = \nabla_3 u \text{ în } D_3$$

$\left(\text{adică dacă } f_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x},\ f_2 = \dfrac{\partial u}{\partial y},\ f_3 = \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$, atunci $\mathbf{f}$ se numeşte *cîmp potenţial* în D_3 iar u este *potenţialul scalar* al lui $\mathbf{f}$.

Dacă însă $\mathbf{f} \in C^1(D_3)$, atunci funcţia (scalară)

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial z} = (\nabla_3, \mathbf{f})$$

se numeşte *divergenţa* cîmpului vectorial $\mathbf{f}$ iar cîmpul vectorial

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_4}\right)\mathbf{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{k} = [\nabla_3, \mathbf{f}]$$

se numeşte *rotorul* cîmpului vectorial $\mathbf{f}$.

Dacă un cîmp vectorial în D_3 este astfel încît $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ în D_3, atunci $\mathbf{f}$ se numeşte *cîmp solenoidal* (sau *fără surse*) în D_3 iar dacă $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$, $\mathbf{f}$ se va numi cîmp vectorial *irotaţional*; în sfîrşit, dacă există cîmpul vectorial $\mathbf{g} \in C^1(D_3)$ astfel încît $\mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{g}$, atunci vom numi $\mathbf{f}$ cîmp *rotaţional* iar $\mathbf{g}$ este *potenţialul vector* al lui $\mathbf{f}$.

Teoria cîmpurilor (scalare, vectoriale, tensoriale) servesc drept cadru matematic natural în care se desfăşoară procesele ale căror modele matematice ne interesează; o descriere cît mai corectă a unui fenomen pretinde definirea cît mai aproape de realitate a unui cîmp adecvat fenomenului. De aceea, problemele legate de proprietăţile unor cîmpuri date sînt deosebit de importante în practică şi, cum vom arăta, că în mod natural, teoria cîmpurilor este legată şi de teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea. Astfel, dacă dorim ca un cîmp vectorial dat în D_3 să fie simultan potenţial şi solenoidal, deci să avem

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 0, \text{ dacă } \mathbf{f} = \operatorname{grad} u,$$

atunci dacă $u \in C^2(D_3)$, cum $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, se deduce că o asemenea situaţie este posibilă şi pentru aceasta este necesar şi suficient ca potenţialul scalar al lui $\mathbf{f}$ să fie o funcţie armonică în D_3.

Cel mai simplu (dar şi cel mai important) exemplu de cîmpuri potenţiale şi solenoidale se obţine în cazul legii atracţiei universale, cînd forţa de atracţie $\mathbf{f}$ are forma

$$\mathbf{f} = \frac{k}{r^3}\mathbf{r},$$

$k \in \mathbb{R}$, $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$, $\mathbf{r} = (x-x_0)\,\mathbf{i} + (y-y_0)\,\mathbf{j} + (z-z_0)\,\mathbf{k}$ iar potenţialul scalar va fi $u(x, y, z) = \dfrac{-k}{r} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{P_0\})$, P_0 avînd coordonatele (x_0, y_0, z_0) iar calcule simple arată că $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$. Aceleaşi fapte sînt valabile şi în cazul atracţiei electrice, cînd datorită legii lui Coulomb forţa de atracţie dintre două mase electrice este egală cu

$$\mathbf{f} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon r^3}\mathbf{r},$$

Q_1, Q_2 fiind valorile absolute ale sarcinilor electrice, plasate în P_0 şi $P(x, y, z)$, iar ε este constanta dielectrică absolută.

O altă problemă importantă din teoria cîmpurilor vectoriale este aceea a posibilităţii descompunerii oricărui cîmp vectorial $\mathbf{f}$ sub forma

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2,$$

unde $\mathbf{f}_1$ este cîmp potenţial iar $\mathbf{f}_2$ este solenoidal, deci

$$\mathbf{f}_1 = \operatorname{grad} u, \ \operatorname{div} \mathbf{f}_2 = 0.$$

Aplicînd operatorul divergenţă lui $\mathbf{f}$ scris sub forma

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} u + \mathbf{f}_2,$$

se obţine ecuaţia

$$\Delta_3 u = g, \ g = \operatorname{div} \mathbf{f},$$

în care $g \in C^0(D_3)$ [dacă $\mathbf{f} \in C^1(D_3)$] este o funcţie cunoscută; ecuaţia Laplace neomogenă astfel obţinută

$$\Delta_3 u = g$$

care trebuie verificată de către potenţialul scalar al cîmpului vectorial $\mathbf{f}_1$ se numeşte *ecuaţie Poisson* şi dacă se obţine soluţia acestei ecuaţii, atunci $\mathbf{f}_2$ este uşor de găsit:

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f} - \operatorname{grad} u.$$

Evident, atît la ecuaţia Laplace

$$\Delta_3 u = 0$$

cît şi la ecuaţa Poisson

$$\Delta_3 u = g$$

trebuie ataşate anumite condiţii la limită, deoarece cîmpurile în cauză fiind cunoscute, ele vor verifica anumite condiţii (de exemplu, pe ∂D_3).

În sfîrşit, o altă problemă importantă din teoria cîmpurilor vectoriale este aceea a determinării unui cîmp cunoscîndu-se divergenţa şi rotorul; cu alte cuvinte, trebuie determinat $\mathbf{f} \in C^2(D_3)$ astfel încît

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = d, \ \operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{R},$$

d şi $\mathbf{R}$ fiind un cîmp scalar, respectiv vectorial în D_3, ambele cunoscute. Utilizînd identitatea vectorială

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{f}) - \Delta_3 \mathbf{f},$$

se deduce că $\mathbf{f}$ va fi o soluţie (în condiţiile precizate la limită) a ecuaţiei Laplace vectoriale

$$\Delta_3 \mathbf{f} = \operatorname{grad}(d) - \operatorname{rot}(\mathbf{G}),$$

înţelegînd prin $\Delta_3 \mathbf{f}$ cîmpul vectorial

$$\Delta_3 \mathbf{f} = (\Delta_3 f_1)\,\mathbf{i} + (\Delta_3 f_2)\,\mathbf{j} + (\Delta_3 f_3)\,\mathbf{k}.$$

1.1.3. Modele din biologie

Utilizarea metodelor matematice în biologie au o istorie veche, chiar Euler a studiat circulaţia sîngelui prin artere, urmărind un model hidrodinamic; în ultimii ani în biologie, biofizică, biochimie, microbiologie au început să se utilizeze diverse metode matematice pentru a deduce modele adecvate unor procese din domeniile respective. Dacă la început au fost utilizate în special teoria probabilităţilor şi statistica matematică (acestea dovedindu-se insuficiente), ulterior s-a recurs la metodele teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale şi a ecuaţiilor integrale în rezolvarea unor probleme privind activitatea cordului, propagarea perturbaţiilor nervoase, sau în legătură cu descrierea proceselor biologice periodice (aşa-numitele ceasuri biologice).

Una din ecuaţiile importante în studiul creşterii şi difuziei unor populaţii are forma

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}\left[k \operatorname{grad}(p)\right] + \varepsilon(t)\, p\, F\left(\frac{p}{h}\right) + p\int_{t_0}^{t} K(t, s)\, p(s, x, y, z)\, ds$$

şi este deci o ecuaţie integro-diferenţială relativă la funcţia $p = p(t, x, y, z)$ care defineşte densitatea populaţiei în studiu; k este coeficientul de difuzie, ε este viteza de reproducere, h este o constantă iar F şi K sînt funcţii cunoscute, determinate odată cu procesul în cauză. Evident, ecuaţia dată nu este liniară decît dacă $F = 0$, $K = 0$, în care caz apare una din ecuaţiile importante ale fizicii matematice, numită *ecuaţia căldurii*. Ecuaţiei date i se ataşează şi condiţii suplimentare, cum ar fi condiţia iniţială $p(0, x, y, z) = f(x, y, z)$, care defineşte densitatea populaţiei la momentul iniţial, precum şi condiţii la limită, date pe frontiera domeniului în care se studiază fenomenul dat.

1.1.4. Modele matematice ale fizicii

Fizica reprezintă sursa directă a unui imens număr de ecuaţii sau sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea sau de ordin superior iar în cele ce vor urma, vom prezenta cîteva dintre aceste modele.

1.1.4.1. *Ecuaţiile lui Maxwell* sînt

$$[\nabla_3, \mathbf{E}] + \mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0,\ [\nabla_3, \mathbf{H}] - \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \partial\mathbf{E} = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{H}_0 = 0,\ \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(0, x, y, z),\ \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}(0, x, y, z),$$

unde $\mathbf{E}$ este intensitatea cîmpului electric, $\mathbf{H}$ este inducţia magnetică, ε, μ şi σ sînt factori pozitivi denumiţi constanta dielectrică, permeabilitatea şi conductibilitatea electrică.

Deoarece $[\nabla_3, \mathbf{E}] = \operatorname{rot}\mathbf{E}$, $[\nabla_3, \mathbf{H}] = \operatorname{rot}\mathbf{H}$ iar $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f}) = 0$, $\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{H}$, din prima ecuaţie rezultă

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{H} = 0,$$

deci $\operatorname{div}\mathbf{H} = \operatorname{div}\mathbf{H}_0 = 0$ iar din a doua se găseşte $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, deci $\mathbf{H}$ şi $\mathbf{E}$ sînt cîmpuri vectoriale solenoidale.

Utilizînd identitatea vectorială din 1.1.2, avem

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{E}) - \Delta_3\mathbf{E}$$

şi cum $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, avem, din prima ecuaţie:

$$\Delta_3\mathbf{E} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{E}),\ \operatorname{rot}\left(\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = \mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{H}$$

iar în baza celei de-a doua ecuaţii a sistemului, se deduce

$$\Delta_3\mathbf{E} - \mu\left(\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = 0.$$

Procedînd analog, găsim

$$\Delta_3\mathbf{H} - \mu\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = 0,$$

ceea ce înseamnă că atît cîmpul $\mathbf{E}$ cît şi cîmpul $\mathbf{H}$ verifică aceeaşi ecuaţie (vectorială) cu derivate parţiale de ordinul al doilea. Dacă $\sigma \neq 0$, această ecuaţie se numeşte *ecuaţia telegrafiştilor* iar dacă $\sigma = 0$, se obţine *ecuaţia undelor*.

Ecuaţiile lui Maxwell se pot scrie şi sub o altă formă, utilizînd cîmpurile vectoriale anterioare $\mathbf{E}$ şi $\mathbf{H}$, precum şi cîmpul vectorial $\mathbf{I} = \mathbf{I}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ al densităţii de curent, cîmpul scalar $\rho = \rho(\mathbf{x})$ al densităţii sarcinilor:

$$[\nabla_3, \mathbf{E}] + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathbf{H}) = 0 \ (\textit{legea lui Faraday}),$$

$$[\nabla_3, \mathbf{H}] - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{H}) - \frac{4\pi}{c}\mathbf{I} = 0 \ (\textit{legea Biot şi Savart}),$$

$$(\nabla_3, \varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho;\ (\nabla_3, \mu\mathbf{H}) = 0,$$

c fiind viteza de deplasare a luminii în vid, μ și ε putînd fi și funcții de t și $\mathbf{x}$.

Dacă $\rho = 0$, $\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{I} = \sigma\mathbf{E}$ (*legea lui Ohm*), se obține situația anterioară, ecuația telegrafiștilor care apare fiind

$$\Box_{3,a}u + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

$$\Box_{3,a} = \Delta_3 - a^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

($\Box_{3,a}$ este operatorul dalembertian), u fiind $\mathbf{E}$ sau $\mathbf{H}$.

Dacă însă $\mathbf{I} = 0$, $\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$, prin utilizarea potențialului electromagnetic cu patru componente $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (\varphi_0, \boldsymbol{\varphi})$, cîmpurile $\mathbf{E}$ și $\mathbf{H}$ verificînd sistemul lui Maxwell se pot scrie

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t} = \nabla_3\varphi_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\mu}[\nabla_3, \boldsymbol{\varphi}]$$

și în plus vom avea verificate ecuațiile

$$\Box_{3,a}\varphi_0 = -\frac{4\pi c^2}{\varepsilon^2\mu}\rho, \quad \Box_{3,a}\boldsymbol{\varphi} = 0$$

și condiția lui Lorentz

$$\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} - (\nabla_3, \boldsymbol{\varphi}) = 0.$$

În fine, dacă regimul este staționar (cîmpurile nu depind explicit de t), din ecuațiile lui Maxwell se obțin ecuațiile electrostaticii

$$(\nabla_3, \varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho, \quad [\nabla_3, \mathbf{E}] = 0$$

și ale magnetostaticii

$$(\nabla_3, \mu\mathbf{H}) = 0, \quad [\nabla_3, \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{I}.$$

Dacă $\varepsilon \in \mathbb{R}$, din ecuația $(\underline{\nabla}_3, \varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho$ se obține ecuația Poisson

$$\Delta_3\varphi_0 = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

verificată de potențialul scalar φ_0.

1.1.4.2. *Ecuația de mișcare a coardei vibrante.* Prin *coardă vibrantă* se înțelege un mediu elastic unidimensional, care ocupă intervalul $[0, l]$ al axei orizontale (în poziția de echilibru), în mediu apărînd o tensiune constantă μ_0 datorată întinderii lui și fixării sale (rigide sau elastice) la extremitățile $x = 0$ și $x = l$.

Notînd cu ρ densitatea liniară a coardei, a aria secțiunii transversale, cu E modulul lui Young al materialului dacă se face ipoteza că oscilațiile coardei se realizează într-un plan vertical, cu $u = u(t, x)$ depărtarea pe verticală a punctelor coardei în raport cu poziția de echilibru și cu $v = v(t, x)$ deplasarea pe orizontală a coardei, se deduc următoarele expresii pentru energia cinetică T și energia potențială U a coardei :

$$T(t) = \int_0^l \frac{1}{2}\rho(v_t^2 + u_t^2)\,dx,$$

$$U(t) = \int_0^l \{(\mu_0 + Ea[\sqrt{(1+v_x)^2 + u_x^2} - 1])[\sqrt{(1+v_x)^2 + u_x^2} - 1] - (f_1 v + f_2 u)\}\,dx,$$

dacă $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j}$ este rezultanta forțelor exterioare.

Conform cu principiul lui Hamilton (vezi vol. II, cap. 3), ecuația de mișcare în intervalul $[t_0, t_1]$ va coincide cu extremalele funcționalei

$$I(u, v) = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[\frac{1}{2}\rho(v_t^2 + u_t^2) + \{(\mu_0 + Ea[\sqrt{(1+v_x)^2 + u_x^2} - 1])[\sqrt{(1+v_x)^2 + u_x^2} - 1] - (f_1 v + f_2 u)\}\right]dx\,dt$$

și calculînd sistemul Euler-Ostrogradski corespunzător, se deduc ecuațiile cu derivate parțiale :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{(1+v_x)\left(1+\dfrac{Ea}{\mu_0}\left[\sqrt{(1+v_x)^2+u_x^2}-1\right]\right)}{\sqrt{(1+v_x)^2+u_x^2}}\right\}-$$

$$-\frac{\rho}{\mu_0}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=-\frac{1}{\mu_0}f_1(t,\,x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\mu_x\left(1+\dfrac{Ea}{\mu_0}\left[\sqrt{(1+v_x)^2+u_x^2}-1\right]\right)}{\sqrt{(1+v_x)^2+u_x^2}}\right\}-\frac{\rho}{\mu_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{1}{\mu_0}f_2(t,\,x),$$

care sînt ecuații (neliniare) cu derivate parțiale de ordinul al doilea destul de complicate.

Dacă se presupune oscilația punctelor coardei astfel încît $v=0$ (deci în ipoteza că punctul $x_0\in]0,l[$ se deplasează numai pe verticală, pe dreapta $x=x_0$), se obține funcționala (cu $f_2=f$)

$$I(u)=\int_{t_0}^{t}\int_{0}^{l}\frac{1}{2}\left[\rho u_t^2+fu-\mu_0(\sqrt{1+u_x^2}-1)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

ale cărei extremale vor verifica ecuația

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)-\frac{\rho}{\mu_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{1}{\mu}f(t,\,x),$$

adică

$$u_{xx}-\frac{\rho}{\mu_0}(1+u_x^2)^{3/2}u_{tt}=-\frac{1}{\mu_0}(1+u_x^2)^{3/2}f(t,\,x).$$

Luînd în considerație doar micile oscilații (față de poziția de echilibru) cînd se poate neglija u_x^2, se obține ecuația liniară

$$u_{xx}-\frac{\rho}{\mu_0}u_{tt}=-\frac{1}{\mu_0}f(t,\,x),$$

utilizată în vol. II, cap. 4, sub denumirea de ecuația *coardei vibrante*.

Folosind teoria minimului energiei potențiale, în ipoteza $\mathbf{f}=\mathbf{f}(x)$ [deci $f_1=f_1(x)$, $f_2=f_2(x)$] se poate obține poziția de echilibru a unei coarde ; așadar, deoarece $u=u(x)$, $v=v(x)$ și

$$U(u,\,v)=\int_0^l\{\mu_0+Ea[\sqrt{(1+v')^2+u'^2}-1]\,[\sqrt{(1+v')^2+u'^2}-1]+$$

$$+f_1v+f_2u\}\,\mathrm{d}x,$$

extremalele vor fi obținute din sistemul Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{(1+v')\left(1+\dfrac{1}{\mu_0}Ea[\sqrt{(1+v')^2+u'^2}-1]\right)}{\sqrt{(1+v')^2+u'^2}}\right\}=-\frac{f_1(x)}{\mu_0},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{u'\left[1+\dfrac{1}{\mu_0}Ea(\sqrt{(1+v')^2+u'^2}-1)\right]}{\sqrt{(1+v')^2+u'^2}}\right\}=-\frac{f_2(x)}{\mu_0}.$$

În ipoteza $v=0$, deci în cazul vibrațiilor pe verticală energia potențială fiind (cu $f_2=f$)

$$U(u)=\int_0^l\{[\mu_0+Ea(\sqrt{1+u'^2}-1)]\,(\sqrt{1+u'^2}-1)+fu\}\,\mathrm{d}x,$$

poziția de echilibru va fi dată de graficul soluției ecuației Euler

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right)=\frac{-f}{\mu_0}\quad\text{sau}\quad\frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}=-\frac{f}{\mu_0}$$

și deoarece $\dfrac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}$ reprezintă curbura curbei $y=u(x)$, poziția de echilibru va fi direct proporțională cu forța exterioară f și invers proporțională cu tensiunea μ_0.

1.1.4.3. *Ecuația membranei vibrante.* Analogul bidimensional al coardei vibrante este membrana vibrantă, care este un mediu elastic asimilat cu o suprafață din $\mathbb{R}^3$, plană în poziția de echilibru, cînd

fiind întinsă apare o tensiune μ_0 uniformă în diverse puncte ale ei care o obligă la oscilații (în jurul poziției de echilibru) dacă membrana este scoasă din poziția de echilibru. Energia potențială va fi egală cu

$$U(u) = \mu_0 \iint_{D_2} (\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1)\, dx\, dy$$

dacă se ia în considerare cîmpul scalar $u = u(t, x, y)$ care reprezintă distanța (calculată pe perpendiculara la planul care conține poziția de echilibru D_2 a membranei) la poziția de echilibru; evident, dacă intervin forțe exterioare, U se va modifica. Cum energia cinetică este

$$T(u) = \frac{1}{2} \rho \iint_{D_2} u_t^2\, dx\, dy,$$

ρ fiind densitatea membranei, principiul lui Hamilton conduce la ecuația de mișcare

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right) - \frac{\rho}{\mu_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f(t, x, y)}{\mu_0}$$

(f apărînd numai dacă există forțe perturbatoare exterioare) care, explicit, se scrie

$$(1 + u_y^2)\, u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)\, u_{yy} -$$

$$- \frac{\rho}{\mu_0}(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}\, u_{tt} = -(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}\frac{f(t, x, y)}{\mu_0}.$$

Dacă u_x^2, u_y^2 și $u_x u_y$ se neglijează, apare ecuația simplificată

$$\Box_{2,a} u = -\frac{f(t, x, y)}{\mu_0}, \quad a^2 = \frac{\rho}{\mu_0}$$

iar din principiul minimului energiei potențiale se deduce poziția de echilibru

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right) = -\frac{f(x, y)}{\mu_0},$$

care, comparată cu considerațiile din 1.1.1 arată că în poziția de echilibru suprafața definită de membrană va fi definită cu ajutorul curburii medii. Evident, integrarea acestor ecuații se realizează în condiții inițiale sau condiții la limită impuse de situația concretă prezentată.

1.1.4.4. *Ecuația lui Schrödinger* se scrie

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_3 \psi + V\psi$$

dacă o particulă cuantică cu masa m se deplasează într-un cîmp, al cărui potențial este V, $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ fiind funcția de undă a particulei, astfel încît $|\psi(t, \mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}$ este probabilitatea pentru ca particula să se găsească în vecinătatea $V_{\mathbf{x}}$ a punctului $\mathbf{x}$ la momentul t ($d\mathbf{x}$ fiind volumul lui $V_{\mathbf{x}}$). Ca de obicei, $\hbar$ este constanta lui Planck ($h = 1{,}054 \cdot 10^{-27}$ erg/s).

1.1.4.5. *Ecuația Klein-Gordon* se scrie

$$(\Box_3 + m^2)\, \varphi = 0, \quad \Box_3 = \Box_{3;1},$$

și este verificată de funcția de undă $\varphi = \varphi(x_0, \mathbf{x})$, $x_0 = ct$ (c fiind viteza de deplasare a luminii în vid) descrisă de o particulă relativistă liberă (pseudo)scalară avînd masa m.

1.1.4.6. *Ecuațiile lui Dirac* formează un sistem de patru ecuații liniare cu derivate parțiale (cu coeficienți complecși) de ordinul întîi

$$\left(i \sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - mI\right) u(\mathbf{x}) = 0,$$

I fiind matricea unitate iar matricele coeficienți sînt

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ele verificînd egalitatea

$$\left(\sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 = \square_4 I.$$

Aceste ecuații apar în descrierea unei particule relativiste libere avînd masa m și spinul 1/2 (electron, proton, neutron, neutrino etc.). cu $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ spinorul corespunzător.

1.1.4.7. *Ecuația difuziei și ecuația de transfer.* Procesele de propagare a căldurii sau de difuzie a particulelor dintr-un mediu în altul sînt descrise, în primă aproximație, prin cîmpuri scalare care verifică ecuația difuziei

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu + F(t, x),$$

unde $u = u(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ este temperatura într-un mediu izotrop în punctul de coordonate $\mathbf{x}$ la momentul t, $\rho = \rho(\mathbf{x})$, $c = c(\mathbf{x})$ și $k = k(\mathbf{x})$ sînt densitatea, termocapacitatea, respectiv coeficientul de termoconductibilitate în punctul $\mathbf{x}$ iar F este măsura surselor termice în punctul $\mathbf{x}$ la momentul t.

Dacă c, ρ, k, q sînt constanți, se obține ecuația căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_3 u + bu + f(t, \mathbf{x})$$

cu $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $b = \frac{a}{c\rho}$, $f = \frac{F}{c\rho}$. Evident, soluția u se va obține în funcție de temperatura inițială $u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ și de situația termică la frontiera mediului. În cazul proceselor staționare, deci dacă

$$F(t, \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), \quad u(t, \mathbf{x}) = u(\mathbf{x}),$$

se obține ecuația

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + qu = F(\mathbf{x})$$

care, pentru $k \in \mathbb{R}$, $q = 0$, se transformă în ecuația Poisson

$$\Delta_3 u = -f, \quad f = \frac{F}{k}.$$

Prin *ecuația de transfer* (sau ecuația cinetică) se înțelege ecuația

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{s}, \operatorname{grad} \psi) + \alpha\psi = \alpha h \int_S \psi(\mathbf{x}, s', t)\, ds' + F$$

și apare în cazul în care lungimea traiectoriei unei particule este mare în raport cu dimensiunile ei; aici v este viteza de deplasare (presupusă constantă), $\alpha = 1/l$, l fiind lungimea traiectoriei în punctul $\mathbf{x}$, $h = p_1 + \nu p_3$, p_1 fiind probabilitatea particulei de a se îndepărta de nucleu, p_2 este propabilitatea de a fi absorbită de nucleu, $p_3 = 1 - p_1 - p_2$, $\psi = vn$, $n = n(t, \mathbf{x}, \mathbf{s})$ fiind densitatea particulei în punctul $\mathbf{x}$, deplasîndu-se în direcția $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\|\mathbf{s}\| = 1$ la momentul t iar $F = F(t, \mathbf{x}, \mathbf{s})$ este densitatea surselor.

1.2. Rezolvarea problemei Cauchy. Caracteristici

1.2.1. Definiții

Prin ecuație cu derivate parțiale, relativă la funcția necunoscută $u = u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_n$, $n \geqslant 2$, $u \in C^m(D_n)$, D_n fiind un domeniu din $\mathbb{R}^n$, se înțelege o expresie de forma

$$F\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}, \ldots, \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}, \ldots\right) = 0, \tag{1.8}$$

unde F este o funcție dată în toate argumentele sale iar

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = |\alpha| \leqslant m;$$

evident, se presupune că cel puțin o derivată parțială de ordin $\geqslant 2$ apare efectiv în ecuația (1.8). În 1.1 s-au dat exemple prin care era explicată necesitatea studierii acestor ecuații, problema care se pune și care constituie totodată problema fundamentală a teoriei ecuațiilor de orice fel (algebrică, diferențială, integrală) este aceea a determinării soluțiilor acestor ecuații. O *soluție* a ecuației (1.8) este un element al unui spațiu de funcții convenabil ales care verifică ecuația într-un sens bine precizat; astfel, prin *soluție ordinară* în

$G_n \subset D_n$ a ecuației (1.8), presupusă de ordinul $m \geqslant 2$ [ceea ce implică existența efectivă cel puțin unei derivate $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$, cu $|\alpha| = m$ în ecuația (1.8), dar nici o derivată de ordin mai mare decît m nu apare în ecuație] se înțelege o funcție $u \in C^m(G_n)$ care înlocuită în F împreună cu toate derivatele parțiale care intervin în F îl transformă pe F în funcția nulă în G_n.

Se poate utiliza și noțiunea de *soluție distribuție* sau *soluție slabă* (vezi și cap. 4 din vol. II). Se pot solicita atît toate soluțiile ecuației (1.8) cît și anumite soluții speciale care verifică anumite condiții suplimentare (cum ar fi condițiile inițiale sau condițiile la limită sau combinații de astfel de condiții).

Dacă F este liniară în raport cu derivatele parțiale de ordin maxim ale funcției necunoscute, atunci ecuația se numește *cvasiliniară* iar dacă F este liniară atît în raport cu u cît și în raport cu orice derivată a acestei funcții necunoscute, atunci (1.8) este o ecuație *liniară*.

După cum s-a constatat în 1.1, în practică apar și sisteme de ecuații cu derivate parțiale în care apar mai multe ecuații de forma

$$F_j\left(\mathbf{x}, u_1, \ldots, u_k, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_k}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_1} u_1}{\partial x^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_k} u}{\partial x^{\alpha_k}}, \ldots\right) = 0, \qquad (1.8')$$

$$j = 1, 2, \ldots, q,$$

$u_1, \ldots, u_k$, $k > 1$, fiind funcțiile necunoscute; evident, se presupun aceste ecuații independente între ele (adică o ecuație a sistemului nu poate fi obținută din celelalte prin derivări sau eliminări).

Se spune că sistemul (1.8′) este *determinat*, *supraabundent* sau *subabundent* dacă $q = k$, $q > k$, respectiv dacă $q < k$; nu vor fi luate însă în considerație decît sisteme determinate, adică sisteme în care numărul de ecuații este egal cu numărul de funcții necunoscute.

Se presupune că nu sînt posibile substituții astfel încît ecuația (1.8) să se reducă la o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi; de exemplu, ecuația

$$F\left(x, y, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1}}, \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^k \partial y}\right) = 0$$

prin substituția $v = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ se reduce la ecuația

$$F\left(x, y, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

care va fi de ordinul întîi (și deci va putea fi rezolvată prin metodele din cap. 1, vol. II). De asemenea, se presupune că ecuația (1.8) sau sistemul (1.8′) nu poate fi asimilat cu o ecuație (sau un sistem) diferențială, cum ar fi cazul ecuației

$$a_0(\mathbf{x}) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} + a_1(\mathbf{x}) \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1}} + \ldots + a_m(\mathbf{x}) u = f(\mathbf{x})$$

care poate fi tratată cu ajutorul teoriei ecuațiilor diferențiale din vol. I, presupunînd variabilele $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ca fiind parametri (deci constantele de integrare vor fi de fapt funcții de acești parametri).

1.2.2. Problema Cauchy

Luînd în considerație ecuația cu derivate parțiale (1.8), prin analogie cu teoria prezentată în vol. I și II, prin rezolvarea unei probleme Cauchy atașate acestei ecuații, presupusă de ordinul $m \geqslant 2$, se va înțelege determinarea soluției ecuației care verifică m condiții suplimentare de forma

$$u(\mathbf{x})\Big|_S = f_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial l}\Big|_S = f_1(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u(\mathbf{x})}{\partial l^{m-1}}\Big|_S = f_{m-1}(\mathbf{x}), \qquad (1.9)$$

unde $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$ sînt funcții cunoscute pe suprafața S care este o suprafață $(n-1)$-dimensională din D_n iar $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ este o direcție oarecare din $\mathbb{R}^n$ ($\|\mathbf{l}\| = \sqrt{l_1^2 + \ldots + l_n^2} = 1$). Este evident că pentru $n = 1$ se obține problema Cauchy pentru ecuații diferențiale $\left[\text{în acest caz } \frac{\partial u}{\partial l} = u', \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial l^{m-1}} = u^{(m-1)}\right]$ iar pentru $m = 1$ se obține problema Cauchy, pentru ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi. Dacă $n = 2$, S va fi o curbă. În acest mod, printr-o problemă Cauchy se caută o soluție a ecuației (1.8), definită în vecinătatea suprafeței S, dacă pe S se dau un număr convenabil de date inițiale $(f_0, f_1, \ldots, f_{m-1})$ care se presupun arbitrare. În cazul sistemelor de ecuații (1.8′) vor apărea condiții de tipul (1.9) pentru fiecare funcție necunoscută $u_1, u_2, \ldots, u_k$, numărul total de condiții fiind egal cu $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ dacă m_j este ordinul sistemului în raport cu funcția u_j, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Ca și în cazul ecuațiilor diferențiale, o ecuație de tipul (1.8) poate fi transformată într-un sistem de ecuații cu derivate parțiale de or-

dinul întîi; de asemenea, dacă sistemul (1.8′) este de ordin superior, se poate transforma într-un sistem în care nu apar decît derivate parţiale de ordinul întîi. Reciproca nu este în general valabilă: nu orice sistem diferenţial de ordinul întîi în raport cu funcţiile $u_1, u_2, \ldots, u_k$, prin derivări şi eliminări convenabile, poate fi redus la ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul superior verificate de u_1 sau de $u_2 \ldots$ sau de u_k. Prin aceste operaţii de transformare în sisteme de ecuaţii, condiţiile Cauchy vor avea forma

$$u_1|_S = g_1, \quad u_2|_S = g_2, \ldots, u_q|_S = g_q. \tag{1.9′}$$

1.2.3. Problema Cauchy şi derivata după o direcţie. Caracteristici

După cum reiese din condiţiile (1.9), orice problemă Cauchy pentru ecuaţiile cu derivate parţiale conţine o derivată în raport cu o direcţie $\mathbf{l}$ din $\mathbb{R}^n$ iar o problemă importantă care trebuie rezolvată este aceea a raportului care trebuie să existe între ecuaţia (1.8), suprafaţa S (care se numeşte *suprafaţă iniţială* sau suprafaţa care poartă datele iniţiale) şi direcţia $\mathbf{l}$ care apar în condiţiile (1.9). În cele ce urmează vom face unele consideraţii relativ la derivatele după direcţia $\mathbf{l}$ care apare în condiţiile Cauchy (1.9).

Deoarece $S \subset D_n$ este o suprafaţă avînd dimensiunea $n-1$, în coordonate carteziene, vom scrie ecuaţia lui S sub forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{1.10}$$

unde f este o funcţie reală de o clasă convenabilă (astfel încît toate calculele care vor fi efectuate să aibă sens); de asemenea se presupune că S nu are puncte singulare, deci

$$\nabla_n f \neq 0, \text{ adică } \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 > 0,$$

ceea ce înseamnă că se poate defini versorul $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ al normalei la S în fiecare punct al lui S, punînd

$$\nu_j = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{\|\nabla_n f\|}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.11}$$

Fie $u = u(\mathbf{x})$ o funcţie de o clasă convenabilă, definită într-o vecinătate a unui punct $\mathbf{x}_0 \in S$; prin derivata după direcţia $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$, $\|\mathbf{l}\| = 1$, în punctul $\mathbf{x}_0$, a funcţiei u se înţelege

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \sum_{j=1}^{n} l_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = (\nabla u, \mathbf{l}) \tag{1.12}$$

(dacă u este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$).

Aceste derivate vor fi împărţite în două categorii, dacă luăm în consideraţie suprafaţa S şi anume:

— *derivate tangenţiale* (la S), dacă $\mathbf{l}$ este astfel încît

$$(\mathbf{l}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{j=1}^{n} l_i \nu_i = 0 \tag{1.13}$$

(deci dacă direcţia $\mathbf{l}$ este perpendiculară pe $\boldsymbol{\nu}$, adică se află în planul tangent la S în punctul $\mathbf{x}_0$, de unde şi denumirea de derivată tangenţială) şi

— *derivate exterioare* (la S) dacă $\mathbf{l}$ nu verifică egalitatea (1.13), ceea ce înseamnă că direcţia $\mathbf{l}$ nu se află în planul tangent la S în punctul $\mathbf{x}_0$.

Un rezultat important este cuprins în

Teorema 1.1. *Dacă $\mathbf{l}$ este o direcţie din planul tangent la S în punctul $\mathbf{x}_0$, atunci, dacă u este cunoscut în $\mathbf{x}_0$, şi $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ este cunoscut în punctul $\mathbf{x}_0$.*

⌜ Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ este ecuaţia suprafeţei S, în ipoteza $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \neq 0$ ⌈dacă $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} = 0$, atunci deoarece există cel puţin o derivată parţială $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ nenulă în $\mathbf{x}_0$, prin modificarea notaţiei variabilelor, se ajunge la ipoteza făcută⌉, se poate aplica teorema funcţiilor implicite, ceea ce permite explicitarea variabilei x_n:

$$x_n = g(\mathbf{x}') = g(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

unde $g \in C^1(V_{\mathbf{x}_0'})$, $\mathbf{x}_0' = (x_{01}, \ldots, x_{0,n-1})$, iar $V_{\mathbf{x}'}$ este o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0'$. Deoarece

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}', x_n) = f[\mathbf{x}', g(\mathbf{x}')] = f[x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_{n-1})],$$

avem în baza lui (1.11) :

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}} = -\frac{\nu_j}{\nu_n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Deoarece u şi f se presupun cunoscute, funcţia

$$v(x_1, \ldots, x_{n-1}) = u[x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1})]$$

va fi de asemenea cunoscută, deci şi toate derivatele sale parţiale vor fi cunoscute ; or avem

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\nu_j}{\nu_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

şi deci

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \sum_{j=1}^{n} l_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n-1} l_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + l_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} l_j \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\nu_j}{\nu_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} \right) +$$

$$+ l_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} l_j \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{1}{\nu_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{l}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n-1} l_j \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

[s-a utilizat condiţia (1.13)]. Aşadar, cum $l_1, \ldots, l_{n-1}$ şi $\dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial v}{\partial x_{n-1}}$ sînt cunoscuţi, acelaşi lucru va fi valabil şi pentru $\dfrac{\partial u}{\partial l}$. ⌟

Aşadar, teorema 1.1 arată că dacă pe S se cunoaşte u, atunci pe S va fi cunoscut şi $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ dacă $\mathbf{l}$ este o direcţie oarecare din planul tangent la S într-un punct $\mathbf{x}_0 \in S$; atunci şi toate celelalte derivate $\dfrac{\partial^2 u}{\partial l^2}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial l^3}, \ldots$ vor fi de asemenea cunoscute. Prin urmare, cum în condiţiile Cauchy (1.9) funcţiile $f_0, \ldots, f_{m-1}$ sînt date arbitrar, rezultă că într-o problemă Cauchy direcţia $\mathbf{l}$ trebuie să fie întotdeauna exterioară la S $\left(\text{altfel } f_1 = \dfrac{\partial f_0}{\partial l},\ f_2 = \dfrac{\partial f_1}{\partial l} = \dfrac{\partial^2 f_0}{\partial l^2} \text{ etc.}\right)$. Această condiţie va fi întotdeauna presupusă verificată în momentul în care vom rezolva diverse probleme Cauchy.

Dacă notăm prin $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ derivata după normala la S a funcţiei u utilizate anterior, este evident că această derivată nu este tangenţială [membrul stîng din (1.13) se scrie $\sum_{j=1}^{n} \nu_j^2 = \|\mathbf{v}\|^2 = 1$, deci nu poate fi nul] ; această derivată este importantă prin faptul că derivata după orice direcţie din $\mathbb{R}^n$ a funcţiei diferenţiabile u este o combinaţie liniară între $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$, notînd prin $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ o derivată tangenţială a lui u, adică vor exista numerele reale a şi b astfel încît să avem

$$\frac{\partial u}{\partial l} = a\frac{\partial u}{\partial \nu} + b\frac{\partial u}{\partial \tau}. \tag{1.14}$$

Într-adevăr, pentru $a = \sum_{k=1}^{n} l_k \nu_k$, calculînd diferenţa $\dfrac{\partial u}{\partial l} - a\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$, găsim

$$\frac{\partial u}{\partial l} - a\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{n} l_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \left(\sum_{k=1}^{n} l_k \nu_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(l_j - \nu_j \sum_{k=1}^{n} l_k \nu_k \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} s_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

cu $s_j = l_j - \nu_j \sum_{k=1}^{n} l_k \nu_k$; notînd $t_j = \dfrac{s_j}{\|\mathbf{s}\|}$, $\|\mathbf{s}\|^2 = s_1^2 + \ldots + s_n^2$, t_j vor fi componentele versorului (presupunînd $\|\mathbf{s}\| > 0$) unei direcţii $\mathbf{t}$ din $\mathbb{R}^n$ care, deoarece

$$(\mathbf{t}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} t_j \nu_j = \frac{1}{\|\mathbf{s}\|}\sum_{j=1}^{n} s_j \nu_j = \frac{1}{\|\mathbf{s}\|}\sum_{j=1}^{n} \left(l_j - \nu_j \sum_{k=1}^{n} l_k \nu_k \right) \nu_j =$$

$$= \frac{1}{\|\mathbf{s}\|}\left(\sum_{j=1}^{n} l_j \nu_j - \sum_{j=1}^{n} \nu_j^2 \sum_{k=1}^{n} l_k \nu_k \right) = \frac{1}{\|\mathbf{s}\|}(\mathbf{l}, \mathbf{v}) - \|\mathbf{v}\|^2 (\mathbf{l}, \mathbf{v}),$$

găsim $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) = 0$, deci $\mathbf{t}$ va fi o direcţie tangenţială la S şi egalitatea (1.14) este justificată.

Cu ajutorul teoremei 1.1 şi al lui (1.14) se obţine

Teorema 1.2. *Dacă pe o suprafață S de dimensiune $n-1$ (din $\mathbb{R}^n$) se cunosc u și $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, atunci pe S toate derivatele parțiale ale lui u vor fi cunoscute.*

⌜ Derivatele parțiale $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, pot fi interpretate ca fiind derivate în raport cu direcția axei Ox_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, deci în baza lui (1.14) vor fi o combinație liniară formată cu $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ și $\frac{\partial u}{\partial \tau}$; cum $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ este cunoscut pe S iar din faptul că u este cunoscut pe S se deduce că și $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ este cunoscut pe S, deci $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, va fi cunoscut, se verifică imediat că

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \nu_j \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sum_{k=1}^{n} s_k \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad s_k = -\nu_j \nu_k, \quad k \neq j, \quad s_j = 1 - \nu_j^2, \qquad (1.14')$$

adică aici $a = \nu_j$, $b = \|\mathbf{s}\| = \sqrt{1 - \nu_j^2}$, calculele avînd sens numai dacă derivata după normala la S nu coincide cu $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, ⌟

În particular, dacă $u = 0$ pe S, deci $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$, pentru orice direcție tangențială la S, din (1.14) se deduce

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \nu_j \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.14'')$$

1.2.3.1. *Problema Cauchy și ecuațiile liniare cu derivate parțiale de ordinul întîi.* După cum se știe (vezi cap. 1, vol. II), o ecuație liniară cu derivate parțiale de ordinul întîi de scrie sub forma

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n), \quad \|\mathbf{f}\| > 0, \qquad (1.15)$$

și deci se poate scrie sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = g, \qquad (1.15')$$

unde $\mathbf{l}$ este direcția dată de vectorul $\mathbf{f}$ în fiecare punct din $\mathbb{R}^n$ în care $\mathbf{f}$ este definit iar $g = \frac{f_0}{\|\mathbf{f}\|}$; cum problema Cauchy pentru ecuația (1.15) se scrie $u = u_0$ pe S, u_0 fiind cunoscut, din (1.15') se deduce că pentru ca această problemă să aibă soluții, pentru u_0 dat arbitrar pe S, trebuie ca $\mathbf{l}$ să nu fie o direcție tangentă la S, deoarece în acest caz se deduce egalitatea $\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{l}} = g$ (pe S) și u_0 nu poate fi arbitrar.

Dacă S este astfel încît derivata $\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}}$, definită de ecuația (1.15), este tangențială la S, atunci S este o suprafață caracteristică (în raport cu ecuația considerată), deoarece din condiția $(\mathbf{l}, \mathbf{v}) = 0$ se deduce $\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial h}{\partial x_j} = 0$, dacă $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ este ecuația carteziană a lui S iar S va fi loc de curbe caracteristice, obținute prin integrarea sistemului caracteristic

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(\mathbf{x})} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{f_n(\mathbf{x})}.$$

Prin urmare, pentru ca o problemă Cauchy pentru ecuația (1.15) să admită soluție pentru orice date inițiale u_0, este necesar ca S (suprafața care poartă datele inițiale) să nu fie caracteristică.

1.2.3.2. *Suprafețe caracteristice pentru ecuații cu derivate parțiale.* Pentru a extinde rezultatele din 1.2.3.1 la ecuații de ordin superior trebuie găsită legătura dintre ecuațiile în studiu și derivatele după o direcție dată; or acest lucru se poate obține ușor cu ajutorul egalităților (1.14'). Avem (presupunînd posibilitatea calculelor efectuate)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \left(\nu_j \frac{\partial}{\partial \nu} + b \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\nu_k \frac{\partial u}{\partial \nu} + b \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) = \nu_j \nu_k \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + A_{jk}, \qquad (1.16)$$

unde

$$A_{jk} = \nu_j \frac{\partial}{\partial \nu}\left(b \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) + b \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\nu_k \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},$$

$$j, k = 1, 2, \ldots, n; \qquad (1.16')$$

A_{jk} vor fi funcţii cunoscute pe S dacă u şi $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ sînt cunoscute pe S.

Dacă se consideră ecuaţia liniară cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(\mathbf{x})\, u = b(\mathbf{x}), \qquad (1.17)$$

utilizînd (1.16) şi (1.14'), se deduce egalitatea

$$\left[\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\, \nu_j \nu_k\right] \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\, A_{jk} +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(\mathbf{x})\, \nu_j\right) \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \tau} + a(\mathbf{x})\, u = b(\mathbf{x}) \qquad (1.17')$$

care poate fi scrisă sub forma

$$\left[\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\, \nu_j \nu_k\right] \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = F, \qquad (1.17'')$$

unde F este o funcţie cunoscută pe S dacă se cunosc pe această suprafaţă u şi $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$. Din (1.17'') rezultă că pe S se poate determina şi derivata a doua $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}$ dacă nu se verifică condiţia

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\, \nu_j \nu_k = 0 \qquad (1.18)$$

care, deoarece $\nu_j = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, λ fiind un factor de proporţionalitate, se transcrie

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0. \qquad (1.18')$$

Orice suprafaţă netedă $S \subset \mathbb{R}^n$, $(n-1)$-dimensională avînd ecuaţia carteziană

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

şi care verifică (1.18') se numeşte *suprafaţă caracteristică* pentru ecuaţia cu derivate parţiale (1.17) sau *suprafaţă necaracteristică* în caz contrar.

Din consideraţiile anterioare se deduce că dacă pe o suprafaţă necaracteristică S a ecuaţiei (1.17) se dau arbitrar u şi $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$, atunci pe S se poate determina şi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}$ dacă u este o soluţie oarecare a ecuaţiei; dacă însă S este o suprafaţă caracteristică a ecuaţiei (1.17), atunci, pe lîngă faptul că $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}$ nu poate fi determinat pe S, dar din (1.17'') rezultă că deoarece $F = 0$ pe această suprafaţă, cum F conţine pe u şi $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ calculaţi pe S, condiţia $F = 0$ implică o legătură între aceste două funcţii.

Prin urmare, pe o suprafaţă caracteristică a ecuaţiei (1.17) nu pot fi date arbitrar valorile lui u şi ale lui $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ şi de aceea, dacă avem $F = 0$ $\left(\text{pentru } u \text{ şi } \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \text{ convenabil aleşi}\right)$, soluţia problemei Cauchy corespunzătoare dacă va exista nu va fi unic determinată şi nu va exista, dacă $F \neq 0$. Cum problema Cauchy (1.9) pretinde ca datele iniţiale $f_0, f_1, \ldots$ să fie date abitrar pe S, rezultă că această suprafaţă este în mod obligatoriu o suprafaţă necaracteristică pentru ecuaţiile considerate.

Pentru o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea, suprafeţele caracteristice se obţin cu ajutorul ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întîi (1.18') în care intervin toţi termenii ecuaţiei considerate care sînt coeficienţi pentru derivatele parţiale de ordinul al doilea. Grupul termenilor de ordinul al doilea din ecuaţia (1.17) formează partea principală a acestei ecuaţii şi se observă că dacă se înlocuieşte ecuaţia (1.17) prin ecuaţia

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = B(\mathbf{x}, u, \nabla_n u) \qquad (1.19)$$

care nu mai este liniară, ecuaţia caracteristicilor pentru această nouă ecuaţie nu se modifică, fiind dată de (1.18'). Vom conveni să numim ecuaţiile de forma (1.19) *ecuaţii aproape liniare* de ordinul al doilea. O particularitate a acestor ecuaţii este aceea că au suprafeţele caracteristice determinate independent de orice soluţie a acestora.

Ecuaţiile de forma

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x}, u, \nabla_n u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial u_k} = a(\mathbf{x}, u, \nabla_n u) \tag{1.20}$$

se numesc *cvasiliniare*, ecuaţia caracteristicilor ei fiind

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x}, u, \nabla_n u) \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0. \tag{1.20'}$$

Se observă că suprafeţele caracteristice nu pot fi determinate independent de soluţia u a ecuaţiei (1.20): dacă se cunoaşte soluţia u, înlocuind-o în (1.20'), se pot determina şi suprafeţele caracteristice corespunzătoare.

1.2.3.3. *Caracteristicile ecuaţiilor aproape liniare de ordin superior.* Dacă

$$\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n=0 \\ j_1+\ldots+j_n=m}}^{m} a_{j_1 j_2 \ldots j_n}(\mathbf{x}) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}} = a\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}\right) \tag{1.21}$$

este o ecuaţie aproape liniară de ordin m, ecuaţia caracteristică corespunzătoare se va scrie

$$\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n=0 \\ j_1+\ldots+j_n=m}}^{m} a_{j_1 j_2 \ldots j_n}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{j_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{j_2} \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{j_n} = 0 \tag{1.21'}$$

dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ este ecuaţia carteziană a unei suprafeţe caracteristice. Această ecuaţie caracteristică se deduce exact în acelaşi mod în care s-a dedus ecuaţia (1.18') din ecuaţia (1.17), ea definind coeficientul derivatei $\frac{\partial^m u}{\partial \nu^m}$; prin urmare, dacă suprafaţa S care poartă datele este necaracteristică, atunci datele iniţiale (1.9), $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ sînt arbitrare, aceasta împreună cu ecuaţia (1.21) determinînd în mod unic $\frac{\partial^m u}{\partial \nu^m}$. Dacă însă S este o suprafaţă caracteristică, datele iniţiale $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ trebuie să verifice o relaţie suplimentară şi deci, dacă $f_0, \ldots, f_{m-1}$ o verifică, atunci soluţia problemei

Cauchy, dacă există, nu poate fi unic determinată iar dacă $f_0, \ldots, f_{m-1}$ nu o verifică, problema Cauchy nu poate avea soluţie.

Aşadar, problema Cauchy pentru ecuaţii de forma (1.21) poate fi, eventual, unic determinată numai dacă S este suprafaţă necaracteristică (în raport cu ecuaţia considerată).

Exemple

1. Dacă se consideră ecuaţia lui Laplace

$$\Delta_n u = 0, \text{ unde } \Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

ecuaţia caracteristicilor se va scrie

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 = 0.$$

Evident, singura soluţie reală va fi $f(\mathbf{x}) \equiv A \in \mathbb{R}$; aşadar, ecuaţia Laplace nu are suprafeţe caracteristice reale, deci problema Cauchy se poate scrie pentru orice suprafaţă $S \subset \mathbb{R}^n$, de dimensiune $n-1$:

$$u|_S = f_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}\bigg|_S = f_1,$$

$\mathbf{l}$ fiind orice direcţie netangentă la S.

2. Pentru ecuaţia coardei vibrante din $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x)$$

ecuaţia caracteristicilor va fi

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0$$

sau, deoarece din $f(t, x) = 0$ se deduce $\frac{dx}{dt} = -\frac{f_t}{f_x}$, din ecuaţia cu derivate parţiale a caracteristicilor se deduce ecuaţia diferenţială

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^2$$

ale cărei soluții vor fi $x - at = c_1$, $x + at = c_2$. Așadar, aici caracteristicile sînt drepte din planul $\mathbb{R}^2$.

Prin urmare, în momentul în care la ecuația coardei vibrante se atașează o problemă Cauchy, va trebui, pentru existența soluțiilor, să presupunem că curba din $\mathbb{R}^2$ pe nici o porțiune a sa să nu coincidă cu un segment al dreptelor $x \pm at = c$. În cadrul teoriei practice a coardei vibrante condițiile Cauchy sînt (poziția inițială, respectiv vitezele inițiale)

$$u(t,\ x)|_{t=0} = f_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u(t,\ x)}{\partial t}\right|_{t=0} = f_1(x)$$

iar dreapta $t = 0$ nu este caracteristică pe nici o porțiune a sa, deci f_0 și f_1 pot fi orice funcții.

3. Pentru ecuația căldurii din $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t,\ x)$$

ecuația caracteristicilor se scrie

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

deci singura soluție va fi $f = f(t) = \text{const}$, adică explicitînd pe t, $t = t_0 \in \mathbb{R}$. Așadar, caracteristicile ecuației căldurii vor fi toate dreptele din $\mathbb{R}^2$ paralele cu axa Ox. Prin urmare, ecuația căldurii fiind o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, o problemă Cauchy pentru orice curbă necaracteristică C din $\mathbb{R}^2$ se scrie

$$u(t,\ x)|_C = f_0(t,\ x), \qquad \left.\frac{\partial u(t,\ x)}{\partial l}\right|_C = f_1(t,\ x),$$

l fiind o direcție netangentă la C, f_0 și f_1 sînt funcții oarecare definite pe C.

Dacă C este o curbă caracteristică (deci de forma $t = t_0 \in \mathbb{R}$), f_0 și f_1 nu pot fi oarecare, deci f_1 poate fi determinată cu ajutorul lui f_0 (dacă dorim să existe o soluție) și de aceea, practic, este suficientă doar prima condiție inițială, ceea ce se confirmă cu ajutorul experienței: în cazul în care se interpretează $u(t,x)$ ca fiind temperatura unei bare în punctul x al ei la momentul $t > 0$, condiția inițială se va scrie

$$u(t,\ x)|_{t=0} = f_0(x)$$

și este o condiție dată pe o caracteristică a ecuației căldurii.

1.2.3.4. *Caracteristicile sistemelor de ecuații cu derivate parțiale.* În baza observațiilor din 1.2.1, ne vom limita la studiul sistemelor

de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi și vom considera sistemele liniare. Aceste sisteme vor fi de forma

$$a_{11}^1(\mathbf{x})\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + a_{1m}^1(\mathbf{x})\frac{\partial u_m}{\partial x_1} + a_{11}^2(\mathbf{x})\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \ldots + a_{1m}^2(\mathbf{x})\frac{\partial u_m}{\partial x_2} + \ldots$$

$$\ldots + a_{11}^n(\mathbf{x})\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \ldots + a_{1m}^n(\mathbf{x})\frac{\partial u_m}{\partial x_n} = a_1(\mathbf{x}),$$

$$a_{21}^1(\mathbf{x})\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + a_{2m}^1(\mathbf{x})\frac{\partial u_m}{\partial x_1} + a_{21}^2(\mathbf{x})\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \ldots + a_{2m}^2(\mathbf{x})\frac{\partial u_m}{\partial x_2} + \ldots$$

$$\ldots + a_{21}^n(\mathbf{x})\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \ldots + a_{2m}^n(\mathbf{x})\frac{\partial u_m}{\partial x_n} = a_2(\mathbf{x}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}^1(\mathbf{x})\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + a_{mm}^1(\mathbf{x})\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + a_{mn}^2(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \ldots + a_{mm}^2(\mathbf{x})\frac{\partial u_m}{\partial x_2} +$$

$$\ldots + a_{m1}^n(\mathbf{x})\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \ldots + a_{mm}^n(\mathbf{x})\frac{\partial u_m}{\partial x_n} = a_m(\mathbf{x}),$$

care se pot scrie simplu sub forma matriceală

$$\mathbf{A}^1\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{A}^2\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + \ldots + \mathbf{A}^n\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} = \mathbf{a}, \tag{1.22}$$

unde $\mathbf{A}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, sînt matricele pătrate $\mathbf{A}^j = [a_{kl}^j]$, $k, l = 1,2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, iar $\mathbf{u}$ și $\mathbf{a}$ sînt matrice coloană, definite prin

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristicilor se deduce în același mod ca și în cazurile anterioare. Utilizînd egalitatea (1.14′), adică

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \nu_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} + b_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau}, \quad j = 1, 2, \ldots n,$$

prin înlocuire în ecuația matriceală (1.22) se găsește

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}^j \nu_j\right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} + \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}^j b_j\right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} = \mathbf{a} \qquad (1.22')$$

iar, ca și mai sus, ecuația caracteristică se obține din condiția ca să nu poată fi explicitat $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu}$ din (1.22′). Pentru aceasta va trebui să avem

$$\det\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}^j \nu_j\right) = 0$$

iar cum $\nu_j = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j}$, ecuația caracteristicilor sistemului considerat va fi

$$\det\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}^j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = 0. \qquad (1.23)$$

Interpretînd această ecuație, rezultă că dacă ecuația carteziană a suprafeței S este $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, atunci pentru ca problema Cauchy

$$u_1|_S = u_{10}, u_2|_S = u_{20}, \ldots, u_m|_S = u_{m0} \qquad (1.24)$$

sau matriceal

$$\mathbf{u}|_S = \mathbf{u}_0, \qquad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ \vdots \\ u_{m0} \end{bmatrix} \qquad (1.24')$$

să aibă soluție, este obligatoriu ca S să nu fie o suprafață caracteristică pentru sistemul (1.22) (evident, în ipoteza că funcțiile $u_{10}, u_{20}, \ldots, u_{m0}$ sînt arbitrare).

Exemple

1. În cazul sistemului Cauchy-Riemann (vezi cap. 5, vol. II)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

avem $m = 2$, $n = 2$ iar forma sa matriceală va fi

$$\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = \mathbf{0} \text{ cu } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

scriind condiția (1.23), avem

$$\mathbf{A}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{B}\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix},$$

adică $\det\left(\mathbf{A}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{B}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$. Deci ecuația caracteristicilor sistemului Cauchy-Riemann coincide cu ecuația caracteristicilor pentru ecuația Laplace $\Delta_2 u = 0$ (vezi exemplul 1° din 1.2.3.3), ceea ce se putea bănui, ținînd seama de teoria expusă în cap. 5, vol. II, cînd s-a arătat că u și v sînt funcții armonice ($\Delta_2 u = 0$, $\Delta_2 v = 0$).

2. În cazul ecuațiilor lui Dirac (vezi 1.1.4.6) avem $n = 4$, $m = 4$, iar ecuația caracteristicilor se va scrie

$$\det\left(\sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \det\left(\gamma^0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \gamma^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \gamma^3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = 0;$$

deoarece

$$\gamma^0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \gamma^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \gamma^3 \frac{\partial f}{\partial x_3} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0} & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_3} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x_2} & -\frac{\partial f}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x_2} & -\frac{\partial f}{\partial x_0} & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial f}{\partial x_0} \end{bmatrix}$$

rezultă

$$\det\left(\sum_{k=0}^{3}\gamma^k\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^4+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^4+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^4+\left(\frac{\partial f}{\partial f_3}\right)^3-2\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2=$$

$$-2\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2-2\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+$$

$$+2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2=$$

$$=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2\right]^2.$$

1.3. Teorema de existență și unicitate Cauchy-Kovalevskaia

1.3.1. Determinarea aproximativă a soluției problemei Cauchy

Pentru ușurința calculelor, vom lua în considerație cazul unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea cu două variabile independente de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.22}$$

la care vom atașa problema Cauchy

$$u(x,y)|_{x=0}=\varphi(y),\quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0}=\psi(y); \tag{1.23}$$

în ipoteza că dreapta $x=0$ nu este o curbă caracteristică a ecuației (1.22), fapt care va fi verificat ulterior. Problema Cauchy (1.23) se încadrează în limitele stabilite în 1.2, deoarece derivata $\frac{\partial u}{\partial x}$ nu este o derivată tangențială la $x=0$ (este chiar derivata după normala la dreapta $x=0$). Prin urmare, conform cu rezultatele din 1.2, din condițiile inițiale (1.23), în ipoteza că φ și ψ sînt funcții de o clasă convenabilă, se pot obține derivatele tangențiale la $x=0$; or aceste

derivate tangențiale nu sînt altceva decît derivate în raport cu variabila y ($x=0$ este axa Oy) și deci din prima condiție (1.23) se găsesc toate derivatele de forma

$$\left.\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right|_{x=0}=\varphi^{(k)}(y),\ k=0,1,2,\ldots \tag{1.24}$$

iar din a doua condiție (1.23) se vor obține toate derivatele de forma

$$\left.\frac{\partial^{k+1}u(x,y)}{\partial x\,\partial y^k}\right|_{x=0}=\psi^{(k)}(y),\quad k=0,1,2,\ldots \tag{1.24'}$$

(evident, în (1.24) și (1.24') $k\leqslant m$ dacă $\varphi,\ \psi\in C^m$). Ecuația (1.22) scrisă pentru $x=0$ conduce, ținînd seama de (1.24) și (1.24') pentru $k=0,1,2$, la posibilitatea determinării lui $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0}$; se găsește

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0}=f\left[0,\ y,\ u(0,y),\ \frac{\partial u(0,y)}{\partial x},\ \frac{\partial u(0,y)}{\partial y},\ \frac{\partial^2(0,y)}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u(0,y)}{\partial y^2}\right]=$$

$$=f[0,\ y,\ \varphi(y),\ \psi(y),\ \varphi'(y),\ \psi'(y),\ \psi''(y)].$$

Avînd la dispoziție funcția u și toate derivatele sale pînă la ordinul al doilea inclusiv și utilizînd dezvoltarea Taylor a funcțiilor de două variabile, se poate scrie aproximativ $u(x,\ y)$ în vecinătatea oricărui punct y_0 al axei $x=0$ în modul următor:

$$u(x,y)\approx u(0,y_0)+\left[x\frac{\partial u(0,y_0)}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial u(0,y_0)}{\partial y}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[x^2\frac{\partial^2(0,y_0)}{\partial x^2}+2x(y-y_0)\frac{\partial^2 u(0,y_0)}{\partial x\,\partial y}+(y-y_0)^2\frac{\partial^2 u(0,y_0)}{\partial y^2}\right]=$$

$$=\varphi(y_0)+[x\psi(y_0)+(y-y_0)\,\varphi'(y_0)]+$$

$$+\frac{1}{2}\{x^2 f[0,\ \varphi(y_0),\ \psi(y_0),\ \varphi'(y_0),\ \psi'(y_0),\ \psi''(y_0)]+$$

$$+2x(y-y_0)\,\psi'(y_0)+(y-y_0)^2\varphi''(y_0)\}.$$

Dacă și f (definit prin ecuația (1.22)) este o funcție diferențiabilă în toate argumentele sale, se poate determina și $\frac{\partial^3 u(0, y)}{\partial x^3}$ iar cum toate celelalte derivate parțiale de ordinul trei sînt determinate prin (1.24), (1.24'), din dezvoltarea Taylor se pot lua în considerație și termenii de gradul trei. În acest mod, în ipoteza că f, φ și ψ sînt funcții suficient de regulate, se pot deduce polinoame în două variabile de grad cel puțin doi, care le presupunem ca fiind aproximări ale soluției căutate. Acest procedeu este însă pur formal, deoarece nu se știe dacă problema Cauchy (1.23) pentru ecuația (1.22) admite soluții; dacă însă s-a demonstrat existența și unicitatea soluției acestei probleme Cauchy, este natural să se presupună că în acest mod se pot obține soluții aproximative pentru această problemă. Vom arăta că în ipoteza analiticității funcțiilor φ, ψ și f în toate variabilele sale, soluția problemei (1.23) pentru ecuația (1.22) va fi de asemenea analitică (pentru $|x|$ și $|y - y_0|$ suficient de mici), așa că, cel puțin în această situație, procedeul anterior este justificat.

1.3.2. Funcții analitice de mai multe variabile

Pentru demonstrația teoremei de existență și unicitate sînt necesare cîteva noțiuni simple din teoria funcțiilor analitice de mai multe vaiabile (pe care le vom presupune reale).

Dacă $f: D_n \to \mathbb{R}$, $D_n \subset \mathbb{R}^n$, atunci se spune că f este analitică (sau olomorfă) în punctul $\mathbf{x}^0 \in D_n$, dacă are loc dezvoltarea în serie de puteri

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 0}^{\infty} a_{j_1 j_2 \ldots j_n} (x_1 - x_1^0)^{j_1} (x_2 - x_2^0)^{j_2} \ldots (x_n - x_n^0)^{j_n} \tag{1.25}$$

care este convergentă pentru orice $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < R$, $R > 0$; aici

$$\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \text{ iar } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| = [(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Ca și în teoria dezvoltării în serie de puteri pentru funcții de o singură variabilă reală (sau complexă), se poate arăta ușor că seria (1.25) este absolut și uniform convergentă în orice vecinătate $B_r(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$, $r < R$ fiind astfel ales încît $B_r(\mathbf{x}^0) \subset D_n$; în consecință f va fi o funcție de clasă C^∞ în $B_r(\mathbf{x}^0)$, derivatele parțiale ale lui f putîndu-se obține prin derivare termen cu termen a seriei de puteri (1.25). În acest mod, se obțin egalitățile [folosind convenția $j = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, $j_1, j_2, \ldots, j_n \in \mathbb{Z}_+$, $j! = j_1! j_2! \ldots j_n!$]

$$a_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \frac{1}{j_1! j_2! \ldots j_n!} \left. \frac{\partial^{j_1 + j_2 + \ldots + j_n} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \ldots \partial x_n^{j_n}} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^0} =$$

$$= \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^j} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^0} \tag{1.26}$$

care leagă coeficienții seriei de puteri (1.25) de derivatele funcției f (care este suma acestei serii de puteri). Reciproc, dacă f este analitică în punctul $\mathbf{x}^0 \in D_n$, atunci valorile derivatelor lui f în $\mathbf{x}^0$ determină valorile lui f într-o vecinătate $B_r(\mathbf{x}^0)$, cu $r > 0$ suficient de mic. Această ultimă proprietate (care nu este valabilă pentru orice funcție indefinit derivabilă în $\mathbf{x}^0$) este esențială în demonstrația teoremei de existență și unicitate a problemei Cauchy (1.23) pentru ecuația (1.22).

Operațiile algebrice (produsul cu un număr real, suma, produsul, cîtul dacă numitorul nu se anulează) în mulțimea funcțiilor analitice în $\mathbf{x}^0 \in D_n$ conduc iarăși la funcții analitice în $\mathbf{x}^0$ iar dacă f este analitică în orice punct al lui D_n, se spune că f este analitică în domeniul D_n. Compunerea $(g \circ f)$ a două funcții analitice va fi iarăși o funcție analitică (dacă are sens această operație): deci se presupune f analitică în $\mathbf{x}^0 \in D_n$, g analitică în $\mathbf{y}^0 \in]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$ și atunci compunerea $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g[f(\mathbf{x})]$, $g \circ f: D_n \to \mathbb{R}$, va fi analitică în $\mathbf{x}^0 \in D_n$.

Se poate arăta însă că și înlocuirea variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prin funcții analitice $x_j = g_j(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, g_j fiind toate analitice în $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, va conduce la o funcție analitică în punctul y^0:

$$f[x_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_m)] =$$

$$= \sum_{k_1, \ldots, k_m = 0}^{\infty} b_{k_1 \ldots k_m} (y_1 - y_1^0)^{k_1} \ldots (y_m - y_m^0)^{k_m}.$$

Coeficienții $b_{k_1 \ldots k_m}$ vor fi polinoame cu coeficienți pozitivi (variabilele fiind coeficienții dezvoltării lui f și ai dezvoltării funcțiilor g_j, $j = 1, 2, \ldots, n$).

Pentru a justifica această ultimă afirmație (care se poate demonstra prin inducție), vom considera un exemplu care va fi utilizat în viitor. Să presupunem $n = 1$,

$$f(x) = \frac{Mr}{r - x} = M \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{r^j}, \qquad |x| < r \tag{1.27}$$

și

$$x = y_1 + y_2 + \ldots + y_m;$$

găsim

$$f(y_1 + y_2 + \ldots + y_m) = \frac{Mr}{r - (y_1 + \ldots + y_m)} =$$

$$= M \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(y_1 + y_2 + \ldots + y_m)^j}{r^j}$$

și deoarece are loc egalitatea

$$(y_1 + y_2 + \ldots + y_m)^j = \sum_{|\alpha| = j} \frac{j!}{\alpha!} y^\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = j} \frac{j!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_m!} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_m^{\alpha_m},$$

[care se demonstrează prin inducție, plecînd de la formula binomului lui Newton $(y_1 + y_2)^j$], avem

$$f(\mathbf{y}) = f(y_1 + y_2 + \ldots + y_m) =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 0}^{\infty} \frac{M}{r^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m}} \left[\frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \right] y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_m^{\alpha_m} =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 0}^{\infty} b_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} y_1^{\alpha_1} \ldots y_m^{\alpha_m}, \; |y_1 + y_2 + \ldots + y_m| < r, \qquad (1.27')$$

unde

$$b_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \frac{M}{r^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m}} \cdot \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!}.$$

Se verifică afirmația făcută : $b_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ sînt polinoame cu coeficienți pozitivi, egali cu $\frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \geqslant 1$, în coeficienții dezvoltării lui f (aici este vorba de un polinom de gradul întîi în M/r^j).

O noțiune importantă, pentru consideratiile viitoare, legată de funcțiile analitice este aceea de *majorantă* a unei funcții analitice. Vom spune că $F : B_r(\mathbf{x}^0) \to \mathbb{R}$ este o majorantă pentru f [presupusă analitică în $\mathbf{x}^0$ și seria de puteri fiind convergentă în $B_r(\mathbf{x}^0)$] dacă F este de asemenea analitică în $\mathbf{x}^0$,

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 0}^{\infty} A_{j_1 j_2 \ldots j_n} (x_1 - x_1^0)^{j_1} (x_2 - x_2^0)^{j_2} \ldots (x_n - x_n^0)^{j_n}, \qquad (1.28)$$

iar toți coeficienții $A_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ sînt nenegativi și astfel încît

$$|a_{j_1 j_2 \ldots j_n}| \leqslant A_{j_1 j_2 \ldots j_n}$$

pentru toți indicii $j_1, j_2, \ldots, j_n$, $a_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ fiind definiți prin seria de puteri (1.25) pentru funcția analitică f. Dacă F este o majorantă pentru f, se precizează acest fapt scriind $f \ll F$.

Orice funcție f analitică în $\mathbf{x}^0 \in D_n$ admite cel puțin o majorantă. Într-adevăr, alegînd un punct $\mathbf{x} \in D_n$ în care seria de puteri (1.28) este convergentă, înlocuind acest punct, se va obține o serie numerică convergentă, deci termenul general al ei tinde la zero. Deci, pentru $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|$ suficient de mic, ceea ce se întîmplă presupunînd

$$|x_1 - x_1^0| < r, \ldots, |x_n - x_n^0| < r,$$

cînd vom găsi $M > 0$, independent de $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}^0)$, astfel încît

$$|a_{j_1 j_2 \ldots j_n} (x_1 - x_1^0)^{j_1} (x_2 - x_2^0)^{j_2} \ldots (x_n - x_n^0)^{j_n}| =$$

$$= |a_{j_1 j_2 \ldots j_n}| |x_1 - x_1^0|^{j_1} |x_2 - x_2^0|^{j_2} \ldots |x_n - x_n^0|^{j_n} <$$

$$< |a_{j_1 j_1 \ldots j_n}| r^{j_1 + j_2 + \ldots + j_n} \leqslant M,$$

obținem inegalitățile

$$|a_{j_1 j_2 \ldots j_n}| \leqslant \frac{M}{r^j}, \; j = j_1 + j_2 + \ldots + j_n,$$

și deci, în baza faptului că $\frac{(j_1 + j_2 + \ldots j_n)!}{j_1! j_2! \ldots j_n!} \geqslant 1$, vom avea

$$|a_{j_1 j_2 \ldots j_n}| \leqslant \frac{M}{r^{j_1 + \ldots + j_n}} \frac{(j_1 + \ldots + j_n)!}{j_1! \ldots j_n!} = A_{j_1 j_2 \ldots j_n}.$$

Cum $A_{j_1 j_2 \ldots j_n} > 0$, toate condițiile care definesc o majorantă sînt verificate. Conform cu (1.27′) și (1.27) se deduce

$$f(\mathbf{x}) \ll \frac{Mr}{r - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1^0 - x_2^0 - \ldots - x_n^0)}, \quad |x_j - x_j^0| < r. \tag{1.28}$$

În sfîrșit , o altă proprietate importantă a seriilor de puteri în mai multe variabile este aceea a prelungirii analitice : dacă f este dezvoltabilă în serie de puteri centrată în $\mathbf{x}^0$, atunci dacă f este analitică în D_n, plecînd de la dezvoltarea valabilă în $\mathbf{x}^0$, prin înlocuirile $x_j - x_j^0 = (x_j - x_j') + (x_j' - x_j^0)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, se obține o serie de puteri centrată în $\mathbf{x}' = (x_1', x_2' \ldots, x_n')$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1, \ldots, j_n = 0}^{\infty} b_{j_1 j_2 \ldots j_n} (x_1 - x_1')^{j_1} \ldots (x_n - x_n')^{j_n},$$

convergentă pentru $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < r - \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^0\|$, $j = 1, 2, \ldots, n$, cel puțin. În acest mod, plecînd din $\mathbf{x}^0$, se ajunge după un număr finit de pași în orice alt punct $\mathbf{x} \in D_n$, distanța dintre $\mathbf{x}^0$ și $\mathbf{x}$ fiind finită.

1.3.3. Teorema de existență Cauchy-Kovalevskaia

După cum s-a menționat anterior, dacă se consideră problema Cauchy

$$u(x, y)|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \psi(y) \tag{1.23}$$

pentru ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.22}$$

în ipoteza că f, φ și ψ sînt funcții analitice în variabilele lor, atunci, formal, soluția se poate scrie cu ajutorul unei serii de puteri de forma

$$u(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} (x - x_0)^j (y - y_0)^k, \tag{1.29}$$

coeficienții a_{jk} putîndu-se determina cu ajutorul valorilor funcțiior φ, ψ și f și ale derivatelor lor. Utilizînd (1.26), avem

$$a_{jk} = \frac{1}{j!k!} \left.\frac{\partial^{j+k} u(x, y)}{\partial x^j \, \partial y^k}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}. \tag{1.30}$$

Se presupune inițial că φ și ψ sînt funcții analitice într-o vecinătate $B_r(y_0)$ iar f este analitică în vecinătatea punctului $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0, s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$, unde

$$u_0 = u(x_0, y_0), \quad p_0 = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad q_0 = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y},$$

$$s_0 = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x \, \partial y}, \quad t_0 = \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2},$$

și fără a se micșora generalitatea studiului, se poate presupune $x_0 = 0, y_0 = 0, u_0 = 0, p_0 = 0, q_0 = 0, s_0 = 0, t_0 = 0$ iar $f(0,0,0,0,0,0,0) = 0$,

$$p(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y},$$

$$r(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}, \quad s(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \, \partial y}, \quad t(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}.$$

Deci ecuația (1.22) și condițiile inițiale se vor transcrie

$$r = f(x, y, u, p, q, s, t), \quad u(x, y)|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad p(x, y)|_{x=x_0} = \psi(y). \tag{1.22′}$$

Pentru a justifica afirmația anterioară, se face atît schimbarea de variabile $(x, y) \leftrightarrow (x_1, y_1)$, $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$, care transformă punctul (x_0, y_0) din planul raportat la axele xOy în originea axelor Ox_1 și Ox_2 și schimbarea de funcție $u \leftrightarrow u_1$,

$$u(x, y) = u_0 + (p_0 x_1 + q_0 y_1) + \frac{1}{2}(r_0 x_1^2 + 2 s_0 x_1 y_1 + t_0 y_1^2) + u_1(x_1, y_1),$$

cu p_0, q_0, s_0, t_0 definiți mai sus, iar $r_0 = \dfrac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2}$; este ușor de verificat că

$$u_1(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(0, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_1(0, 0)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_1(0, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_1(0, 0)}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_1(0, 0)}{\partial y} = 0,$$

iar ecuația (1.22) devine

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = f\Big[x_1 + x_0,\ y_1 + y_0,\ u_1 + u_0 + (p_0 x_1 + q_0 y_1) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,(r_0 x_1 + 2 s_0 x_1 y_1 + t_0 y_1^2),\ p_0 + r_0 x_1 + s_0 y_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

$$q_0 + s_0 x_1 + t_0 y_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y_1},\quad s_0 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\, \partial y_1},\ t_0 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}\Big] - r_0,$$

Din $r_0 = f(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0, s_0, t_0)$, scriind ultima ecuație sub forma

$$r_1 = f_1(x_1, y_1, u_1, p_1, q_1, s_1, t_1),$$

se deduce $f_1(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = f(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0, s_0, t_0) - r_0 = 0$.

Aceste transformări impun $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, dar cu schimbarea

$$u(x, y) = \varphi(y) + (x - x_0)\,\psi(y) + z(x, y)$$

se constată că pentru funcția z condițiile Cauchy vor fi nule pentru $x = x_0$:

$$z(x_0, y) = 0, \quad \frac{\partial z(x_0, y)}{\partial x} = 0$$

și deci, vom lua în considerație ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea (neliniară) scrisă în notațiile lui Monge

$$r = f(x, y, u, p, q, s, t) \tag{1.31}$$

și condițiile inițiale

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = p(0, y) = 0. \tag{1.31'}$$

Teorema de existență a soluției analitice (pentru $x = 0$, $y = 0$)

$$u(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} x^j y^k \tag{1.32}$$

va fi demonstrată dacă arătăm că seria din (1.32) este convergentă pentru $|x|$ și $|y|$ suficient de mici.

Teorema 1.3 (*Cauchy-Kovalevskaia*). *Dacă f din ecuația* (1.31) *este o funcție analitică în variabilele sale în vecinătatea originii din $\mathbb{R}^7$, atunci pentru $|x|$ și $|y|$ nenuli dar suficient de mici, funcția u definită prin* (1.32) *este analitică și definește singura soluție analitică a problemei Cauchy* (1.31') *pentru ecuația considerată.*

Odată cu ecuația (1.31) vom considera și ecuația neliniară cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$r = F(x, y, u, p, q, s, t), \tag{1.33}$$

unde F este majorantă pentru f:

$$f \ll F; \tag{1.33'}$$

scriind acum soluția formală a problemei Cauchy (1.31') pentru ecuația (1.33), adică

$$u(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} A_{jk} x^j y^k, \tag{1.34}$$

vom avea inegalitățile

$$|a_{jk}| < A_{jk}, \qquad j, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.34'}$$

deoarece A_{jk} se formează cu ajutorul valorilor lui F și a derivatelor sale exact la fel cum se formează a_{jk} cu ajutorul lui f și al derivatelor sale. În a_{jk} intervin derivatele de ordin $\leqslant j + k$ ale lui f, care este o funcție compusă și în baza celor expuse în 1.3.2 derivatele succesive ale lui f vor fi polinoame cu coeficienți pozitivi formate cu derivatele lui f și u calculate în origine; or derivatele lui f (în valoare absolută) vor fi majorate cu ajutorul derivatelor lui F (care sînt nenegative) și al derivatelor lui u [soluție a ecuației (1.33)]. Rezultă că dacă aceste ultime derivate sînt nenegative, vom avea verificate inegalitățile (1.34') și de aceea teorema va fi demonstrată (în partea ei de existență) dacă reușim să găsim funcția majorantă F care admite [pentru pro-

blema Cauchy (1.31'), atașată ecuației (1.33)] o soluție avînd toate derivatele nenegative (pentru $x = 0, y = 0$). Dar deoarece se verifică ușor că pentru $M > 0$ suficient de mare și $a > 0$, $b > 0$ suficient de mici funcția $\dfrac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)\left(1 - \dfrac{y}{b}\right)} - M$ este o majorantă pentru orice funcție $f(x, y)$ analitică și nulă în origine, vom putea lua

$$F(x, y, u, p, q, s, t) = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{(x/\alpha) + y + u + p + q}{a}\right)\left(1 - \dfrac{s + t}{b}\right)} - M,$$

$$0 < \alpha < 1,$$

iar ecuația (1.33) va admite soluții particulare de forma $u = u(z)$, $z = x + \alpha y$.

Pentru a se verifica datele Cauchy $u(0, y) = 0$, $p(0, y) = 0$ este suficient să se presupună $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ și deoarece

$$p = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = u'(z), \quad q = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \alpha u'(z),$$

$$r = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = u''(z), \quad s = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \alpha u''(z),$$

$$t = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \alpha^2 u''(z),$$

ecuația $r = F$, cu F precizat mai înainte, se transformă într-o ecuație diferențială de ordinul al doilea (neliniară)

$$u'' = \frac{M}{\left[1 - \dfrac{\dfrac{z}{\alpha} + u + (1 + \alpha)u'}{a}\right]\left(1 - \dfrac{\alpha + \alpha^2}{b}\right)u''} - M,$$

care va admite o soluție analitică care verifică datele Cauchy $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, dacă se poate aduce la forma normală.

Or, punînd în evidență termenii care conțin pe u'', găsim ecuația diferențială

$$\left[1 - \frac{M}{b}(\alpha + \alpha^2)\right]u'' - \frac{\alpha + \alpha^2}{b}u''^2 = \frac{M}{1 - \dfrac{\dfrac{z}{\alpha} + u + (1 + \alpha)u'}{a}} - M, \tag{1.35}$$

care (prin aplicarea teoremei funcțiilor implicite) va putea fi adusă la forma normală dacă $1 - \dfrac{M}{b}(\alpha + \alpha^2) \neq 0$ (ceea ce se poate realiza, avîndu-l la dispoziție pe α).

Conform cu teoria soluțiilor pentru problema Cauchy $u(0) = u'(0) = 0$, atașată ecuației diferențiale $u'' = g(z, u, u')$ (vezi cap. 4, vol. I), dacă g este analitică în origine, va exista o singură soluție analitică; mai rămîne de arătat că toți coeficienții acestei soluții sînt nenegativi. Dar cum

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad u_n = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n u(0)}{\mathrm{d}z^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

se deduce

$$u_0 = u(0) = 0, \quad u_1 = u'(0) = 0.$$

Apoi, deoarece $u_2 = \dfrac{1}{2}u''(0)$, din ecuația (1.35) găsim

$$\left[1 - \frac{M}{b}(\alpha + \alpha^2)\right]u''(0) - \frac{\alpha + \alpha^2}{b}u''^2(0) = 0,$$

deci $u''(0) = 0$. Derivînd ecuația (1.35) în raport cu z, pentru $z = 0$, găsim

$$u'''(0) = \frac{M}{a\alpha\left[1 - \dfrac{M(\alpha + \alpha^2)}{b}\right]}$$

și vom avea $u'''(0) > 0$ dacă se alege α astfel încît

$$\alpha^2 + \alpha < b/M$$

(pînă acum trebuia să avem $\alpha^2 + \alpha \neq b/M$); derivînd de două ori ecuaţia (1.35) şi făcînd $z = 0$, se găseşte

$$\left[1 - \frac{M}{b}(\alpha + \alpha^2)\right] u^{(4)}(0) - 2\frac{\alpha + \alpha^2}{b} u'''^2(0) =$$

$$= \frac{1 + \alpha}{a} M\, u'''(0) + \frac{2M}{a^2\alpha^2}$$

şi cum $u'''(0) > 0$, $1 - \frac{M}{b}(\alpha + \alpha^2) > 0$, se deduce $u^4(0) > 0$. Este evident că dacă $u^{(k)}(0) \geqslant 0, k \leqslant n$, atunci $u^{(k+1)}(0) \geqslant 0$, după cum ne arată ultima egalitate care se va retranscrie şi prin înlocuirea lui $u^{(4)}(0)$ prin $u^{(n+1)}(0)$, singura diferenţă fiind aceea că în membrul al doilea vor apărea polinoame în $u^{(k)}(0)$, $k \leqslant n$, cu coeficienţi nenegativi, deci $u^{(n)}(0) \geqslant 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Revenind la $u(z)$, deoarece $z = x + \alpha y$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha + \alpha^2 < b/M$, avem

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (x + \alpha y)^n = \sum_{j,k=0}^{\infty} A_{jk} x^j y^k,$$

unde A_{jk} sînt polinoame în α, avînd coeficienţii formaţi cu $u_0, u_1, u_2, \ldots$ şi cu coeficienţii binomului lui Newton, adică $A_{jk} \geqslant 0$. Cum seria care defineşte pe $u(x, y)$ este convergentă, în baza criteriului comparaţiei se deduce convergenţa seriei (1.32) pentru $|x| < \delta$, $|y| < \delta$, $\delta > 0$ fiind suficient de mic (sau pentru $|x| + |y| < \varepsilon$). Faptul că această serie este o soluţie a problemei Cauchy în cauză se deduce prin înlocuire în ambii membri ai ecuaţiei $r = f$. Utilizînd descompunerea în serie a funcţiei f, se constată că în baza modului de determinare a coeficienţilor a_{jk}, prin egalarea aceloraşi puteri ale lui x şi y din ambii membri ai ecuaţiei se obţin identităţi.

Teorema va fi în întregime demonstrată dacă va fi arătată unicitatea soluţiei analitice construite mai sus ; or, datorită faptului că a_{jk} s-au determinat cu ajutorul derivatelor unei funcţii analitice, care sînt unic determinate, scriind o altă soluţie

$$v = \sum_{j,k=0}^{\infty} a'_{jk} x^j y^k$$

a aceleiaşi probleme, vom avea neapărat

$$a'_{jk} = a_{jk}, \quad j, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Exemplu. Să găsim soluţia analitică a problemei Cauchy

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \psi(y)$$

pentru ecuaţia

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x,$$

φ şi ψ fiind funcţii analitice.

Folosind notaţiile lui Monge, vom scrie ecuaţia sub forma

$$r = q - x$$

şi deci $f(x, y, u, p, q, s, t) = q - x$ este evident o funcţie analitică în $\mathbb{R}^2$ iar soluţia analitică va exista pentru $|x|$ şi $|y - y_0|$ suficient de mici, y_0 fiind arbitrar. Presupunînd $y_0 = 0$, avem

$$u(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} x^j y^k, \quad a_{jk} = \frac{1}{j!\,k!} \frac{\partial^{j+k} u(0, 0)}{\partial x^j \partial y^k}$$

şi rămîn de exprimat coeficienţii a_{jk} prin φ, ψ, f şi derivatele lor. Avem

$$a_{0k} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u(x, y)}{\partial y^k}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(0, y)\bigg|_{y=0} = \frac{1}{k!} \psi^{(k)}(0),$$

$$a_{1k} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+1} u(x, y)}{\partial x\, \partial y^k}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial y^k} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\bigg|_{x=0}\right]_{y=0} = \frac{1}{k!} \psi^{(k)}(0)$$

$$a_{2k} = \frac{1}{2 \cdot k!} \frac{\partial^{k+2} u(x, y)}{\partial x^2\, \partial y^k}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{2 \cdot k!} \frac{\partial^k}{\partial y^k} \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0}\right]_{y=0} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot k!} \frac{\partial^k}{\partial y^k} [(q - x)|_{x=0}]_{y=0} = \frac{1}{2 \cdot k!} \frac{\partial^{k+1} u(0, y)}{\partial y^{k+1}}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{2 \cdot k!} \varphi^{(k+1)}(0),$$

$$a_{3k} = \frac{1}{6 \cdot k!} \frac{\partial^{k+3} u(x, y)}{\partial x^3\, \partial y^k}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{6 \cdot k!} \frac{\partial^k}{\partial y^k} \left[\frac{\partial}{\partial x}(q + x)\,|_{x=0}\right]_{y=0}.$$

Aşadar, avem

$$a_{30} = \frac{1}{6}\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\psi'(0) + \frac{1}{6},$$

$$a_{3k} = \frac{1}{6\cdot k!}\left.\frac{\partial^{k+1} q}{\partial y^k \partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{6\cdot k!}\psi^{(k+1)}(0), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

iar ceilalţi coeficienţi calculîndu-se analog; deci

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} y^k + x\sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} y^k + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} y^k + x^3 \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} y^k + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)\, y^k + x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\psi^{(k)}(0)\, y^k + \frac{x^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varphi^{(k+1)}(0)\, y^k +$$

$$+ \frac{x^3}{6}[\psi'(0) + 1] + \frac{x^3}{3!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\psi^{(k+1)}(0)\, y^k + \ldots$$

La acelaşi rezultat se poate ajunge căutînd soluţii de forma

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y)\, x^k, \quad a_0(y) = \varphi(y), \quad a_1(y) = \psi(y);$$

introducînd în ecuaţia dată, se obţine egalitatea

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, a_k(y)\, x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k'(y)\, x^k + x$$

din care, prin egalarea coeficienţilor aceloraşi puteri ale lui x, se deduc condiţiile

$$1\cdot 2a_1'(y) = a_0'(y) = \varphi'(y),$$

$$2\cdot 3a_3(y) = a_1'(y) + 1 = \psi(y) + 1,$$

$$3\cdot 4a_4(y) = a_2'(y) = \frac{1}{1\cdot 2}\varphi''(y),$$

. . . . . .

din care se deduc succesiv funcţiile $a_2, a_3, \ldots$; se obţine

$$a_0(y) = \varphi(y), \quad a_{2k}(y) = \frac{1}{(2k)!}\varphi^{(k)}(y); \quad a_1(y) = \psi(y), \quad a_3(y) = \frac{1}{3!}\psi(y) + \frac{1}{3!},$$

$$a_{2k+1}(y) = \frac{1}{(2k+1)!}\psi^{(k)}(y).$$

Prin urmare, soluţia va fi

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\varphi^{(k)}(y) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\psi^{(k)}(y) + \frac{x^3}{6}.$$

În particular, dacă

$$u(0, y) = e^y, \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = e^y,$$

se obţine

$$u(x, y) = \frac{x^3}{6} + e^{x+y}$$

iar dacă

$$u(0, y) = e^y, \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0,$$

se deduce

$$u(x, y) = \frac{x^3}{6} + e^y \operatorname{ch}(x);$$

în sfîrşit, dacă

$$u(0, y) = y^n, \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = y^m, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

soluţia va fi

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(2k)!}x^{2k}y^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1}y^{m-k} + \frac{x^3}{6}.$$

În încheiere, atragem atenţia că teorema 3 se referă la existenţa şi unicitatea soluţiilor analitice pentru problema Cauchy în cauză impusă ecuaţiei date (cu φ, ψ şi f funcţii analitice), nefiind exclusă existenţa unor soluţii neanalitice.

1.3.4. Caracteristicile ecuaţiilor neliniare cu derivate parţiale

Dacă se consideră ecuaţia neliniară cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$F\left[\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k}\right] = 0 \qquad (1.36)$$

la care se atașează problema Cauchy

$$u(\mathbf{x})\big|_{x_n=x_n^0} = \varphi(\mathbf{x}'), \quad \left.\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right|_{x_n=x_n^0} = \psi(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{1.37}$$

pe care vom conveni să o denumim *problemă Cauchy restrînsă*, o demonstrație aproape identică (diferențele fiind datorită numărului de variabile) ne conduce la următoarea concluzie: dacă ecuația (1.36) se poate explicita în raport cu $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, adică dacă se poate scrie sub forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(x, u, p_j, p_{jk}), \tag{1.36'}$$

utilizînd notațiile lui Monge

$$p_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad p_{jk} = \frac{\partial u}{\partial x_j \partial x_k}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n,$$

presupunînd că în membrul al doilea al ecuației (1.36') nu mai apare derivata $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, atunci dacă f, φ și ψ sînt funcții olomorfe în toate variabilele lor, va exista o singură soluție olomorfă

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 0}^{\infty} a_{j_1 j_2 \ldots j_n} (x_1 - x_1^0)^{j_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{j_n}$$

a ecuației (1.36') care va verifica și condițiile (1.37), $(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ este un punct din domeniul de analiticitate al funcțiilor φ, ψ și f (pentru f referindu-se la primele $n-1$ variabile).

Vom atașa acum ecuației (1.36) problema Cauchy generală

$$u(\mathbf{x})\big|_S = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial l}\right|_S = \psi(\mathbf{x}), \tag{1.38}$$

unde φ și ψ sînt funcții cunoscute pe suprafața $n-1$-dimensională S din $\mathbb{R}^n$, avînd ecuația carteziană

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{1.39}$$

iar $\mathbf{l}$ este o direcție exterioară la S. Fie schimbarea de variabile

$$\bar{x}_j = \bar{x}_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\bar{x}_n = G(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

unde funcția G este definită prin (1.39) iar funcțiile $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}$ de clasă $C^s(D_n)$, $s > 2$, sînt astfel alese încît în domeniul $D_n \subset \mathbb{R}^n$ în care se fac calculele (în particular, $S \subset D_n$) să avem

$$\frac{\partial(\mathbf{x})}{\partial(\mathbf{x})} = \frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0,$$

deci transformarea (1.40) este bijectivă, și în plus, să se verifice egalitatea

$$\left.\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial l}\right|_S = \left.\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_n}\right|_{\bar{x}_n = 0}.$$

Pentru a se verifica ultima condiție, este suficient să integrăm ecuația liniară cu derivate parțiale de ordinul întîi

$$l_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + \ldots + l_n \frac{\partial v}{\partial x_n} = 0, \tag{1.41}$$

obținîndu-se funcțiile $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}$ (care pot coincide cu cele $n-1$ integrale prime independente ale sistemului caracteristic corespunzător); atunci, deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} l_j,$$

prin trecerea la variabilele $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, găsim

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \sum_{j=1}^{n} l_j \left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial \bar{x}_j} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_k} \left(\sum_{j=1}^{n} l_j \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_n} \left(\sum_{j=1}^{n} l_j \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_n} \left(\sum_{j=1}^{n} l_j \frac{\partial G}{\partial x_j} \right),$$

dacă se ține seama de faptul că $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}$ verifică ecuația (1.41) și de faptul că din (1.40) rezultă $\bar{x}_n = G$. Cum $\mathbf{l}$ este o direcție exterioară la S, vom avea

$$\sum_{j=1}^{n} l_j \frac{\partial G}{\partial x_j} = (\mathbf{l}, \nabla_n G) \neq 0$$

și se poate presupune $(\mathbf{l}, \nabla_n G) = 1$, ceea ce implică

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{G=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_n}\right|_{\bar{x}_n=0}.$$

Aplicînd în ecuația (1.36) transformarea (1.40), deoarece $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_j}$, α fiind indice de însumare, $\alpha, j = 1, 2, \ldots, n$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial^2 \bar{x}_\alpha}{\partial x_j \partial x_k}$, α, β fiind indici de însumare, $\alpha, \beta, j, k = 1, 2, \ldots, n$, se obține ecuația

$$\bar{F}\left(\bar{x}, u, \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_\alpha}, \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\right) = 0, \tag{1.42}$$

unde

$$\bar{F}\left(\bar{\mathbf{x}}, u, \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_\alpha}, \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\right) = F\left[\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}), u, \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial^2 \bar{x}_\alpha}{\partial x_j \partial x_k}\right]. \tag{1.43}$$

Ecuația transformată (1.42) este de asemenea o ecuație neliniară cu derivate parțiale de ordinul al doilea, căreia i se atașează problema Cauchy restrînsă

$$u(\bar{\mathbf{x}})|_{\bar{x}_n=0} = \varphi(\bar{\mathbf{x}}'), \quad \left.\frac{\partial u(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x}\right|_{\bar{x}_n=0} = \bar{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}'), \quad \bar{\mathbf{x}}' = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}),$$

pentru care, în ipoteza analiticității funcțiilor în cauză, se poate aplica teorema Cauchy-Kovalevskaia numai dacă din ecuația (1.42) se

poate explicita $\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_n^2}$. Teorema funcțiilor implicite permite această explicitare dacă

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{p}_{nn}} \neq 0, \quad \bar{p}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}.$$

Or

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{p}_{nn}} = \frac{\partial F}{\partial p_{jk}} \cdot \frac{\partial p_{jk}}{\partial \bar{p}_{nn}} = \frac{\partial F}{\partial p_{jk}}\frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_k},$$

k, j fiind indici de însumare și ținînd seama de faptul că $\bar{x}_n = G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se obține condiția de aplicabilitate a teoremei Cauchy-Kovalevskaia :

$$\frac{\partial F}{\partial p_{jk}}\frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial G}{\partial x_k} \neq 0.$$

S-a obținut astfel o condiție restrictivă care leagă ecuația (1.36) de suprafața S și acele suprafețe S, avînd ecuația carteziană (1.39) care verifică ecuația neliniară cu derivate parțiale de ordinul întîi

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{jk}}\frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial G}{\partial x_k} = 0, \qquad \|\nabla_n G\| > 0, \tag{1.44}$$

care se transcrie și sub forma

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{jk}} \nu_j \nu_k = 0, \quad \|\boldsymbol{\nu}\| = 1 \tag{1.44'}$$

(ținînd seama că $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ sînt cosinusuri directoare ale normalei la S, deci $\nu_j = \lambda \frac{\partial G}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$), se vor numi *suprafețe caracteristice ale ecuației* (1.36).

Dacă ecuația (1.36) este aproape liniară, adică se scrie sub forma

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + a\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0,$$

atunci ecuația caracteristicilor va coincide cu ecuația

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\, \nu_j \nu_k = 0$$

dedusă la punctul 1.2, deoarece aici

$$F = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} p_{jk} + a \text{ iar } \frac{\partial F}{\partial p_{jk}} = a_{jk}.$$

În cazul ecuațiilor neliniare (1.36) ecuația cu derivate parțiale a caracteristicilor (1.44) va putea fi integrată numai dacă se cunoaște și soluția $u = u(\mathbf{x})$. Astfel, interpretînd soluția $u = u(\mathbf{x})$ a ecuației (1.36) ca o suprafață integrală în spațiul $\mathbb{R}^{n+1}=\{\mathbf{x}, u\}$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ suprafețele caracteristice vor defini pe graficul acestor soluții varietăți n — 1-dimensionale, care se proiectează în spațiul $\mathbb{R}^n$ în suprafețele caracteristice considerate.

În cazul în care avem în vedere rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuații de forma (1.36) noțiunea de caracteristică este fundamentală : nu ne putem aștepta (în general) ca soluția problemei Cauchy să admită o soluție cu date inițiale (1.37) decît numai dacă S este o suprafață necaracteristică pentru ecuația (1.36) pe orice porțiune a sa. Dacă în (1.37) S este o suprafață caracteristică pentru ecuația (1,36), atunci problema Cauchy sau nu există (dacă φ și ψ sînt arbitrare) sau dacă există (ceea ce implică sau φ sau ψ arbitrară), ea nu este unic determinată. Există însă (după cum vom vedea ulterior, vezi cap. 4) situații cînd pe suprafețe caracteristice soluția problemei Cauchy există și este unic determinată.

Deși considerațiile anterioare s-au referit la cazul ecuațiilor și condițiilor Cauchy analitice, totuși le vom presupune aplicabile și în cazul neanalitic. În particular, dacă $n = 2$, adică în cazul ecuațiilor

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0,$$

ecuația caracteristicilor se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2=0,\ \|\nabla_3 G\|>0. \quad (1.45)$$

Dacă însă $G(x, y) = y - y(x)$, ecuația cu derivate parțiale (1.45) se transformă într-o ecuație diferențială

$$\frac{\partial F}{\partial r}y'^2-\frac{\partial F}{\partial s}y'+\frac{\partial F}{\partial t}=0 \quad y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad (1.45')$$

care este echivalentă cu următoarele două ecuații diferențiale de ordinul întîi $\left(\text{cu notațiile } F_r=\frac{\partial F}{\partial r},\ F_s=\frac{\partial F}{\partial s},\ F_t=\frac{\partial F}{\partial t}\right)$:

$$y'(x)=\frac{F_s+\sqrt{F_s^2-4F_rF_t}}{2F_r}=r_1(x, y, u, p, q, r, s, t),$$
$$y'(x)=\frac{F_s-\sqrt{F_s^2-4F_rF_t}}{2F_r}=r_2(x, y, u, p, q, r, s, t). \quad (1.45'')$$

1.3.5. Caracteristicile sistemelor neliniare de ecuații cu derivate parțiale

Toate considerațiile anterioare se pot transpune cu ușurință și în cazul sistemelor neliniare de ecuații cu derivate parțiale ; presupunînd că este cazul unui sistem determinat de ecuații cu derivate partiale, format cu m ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi cu m funcții necunoscute $u_1, u_2, \ldots, u_m$, adică

$$F_j\left(\mathbf{x}, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right)=0,\ j=1, 2, \ldots, m, \quad (1.46)$$

problema Cauchy generală atașată acestul sistem va fi

$$u_1(\mathbf{x})|_S=\varphi(\mathbf{x}), \ldots, u_m(\mathbf{x})|_S=\varphi_m(x). \quad (1.47)$$

Prin problemă Cauchy restrînsă pentru sistemul (1.46) vom înțelege cazul particular următor ;

$$u_1(\mathbf{x})\big|_{x_n=x_n^0}=\varphi_1(\mathbf{x}'), \ldots, u_m(\mathbf{x})\big|_{x_n=x_n^0}=\varphi_m(\mathbf{x}'), \quad (1.47')$$

cu $\mathbf{x}'=(x_1, \ldots, x_{n-1})$, al problemei Cauchy (1.47) iar teorema Cauchy-Kovalevskaia asigură existența și unicitatea soluției acestei probleme, dacă sistemul (1.46) este scris sub formă normală relativă la $\frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}$:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_n}=f_j\left(\mathbf{x}, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_{n-1}}\right),\ j=1, 2, \ldots, m, \quad (1.46')$$

derivatele care se află în membrul întîi din (1.46)′ nemaiapărînd în membrul al doilea.

Problema Cauchy generală (1.47) pentru sistemul (1.46) se rezolvă aducînd-o (dacă este posibil) la problema Cauchy restrînsă (1.47′) pentru un sistem de forma (1.46′). Pentru aceasta se poate utiliza schimbarea de variabile (1.40), presupunînd iarăși că $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ este ecuația carteziană a suprafeței n — 1-dimensionale S. Sistemul (1.46) se va scrie

$$\overline{F}_\alpha\left(\overline{\mathbf{x}}, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial \bar{x}_m}\right)=0,$$

unde

$$\bar{F}_\alpha = F_\alpha\left[\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}),\ u_1,\ \ldots,\ u_m,\ \frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_\alpha}\,\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_j}\right]$$

şi se vor putea explicita derivatele $\dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_n} = \bar{p}_n^1,\ \ldots,\ \dfrac{\partial u_m}{\partial \bar{x}_n} = \bar{p}_n^m$ (conform cu teorema funcţiilor implicite) dacă

$$\frac{\partial(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_m)}{\partial(\bar{p}_n^1, \ldots, \bar{p}_n^m)} \neq 0,$$

ceea ce conduce la definirea ecuaţiei caracteristice pentru sistemul (1.46), care se scrie

$$\frac{\partial(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_m)}{\partial(\bar{p}_n^1, \ldots, \bar{p}_n^m)} = \det\left[\frac{\partial \bar{F}_j}{\partial p_n^k}\right] = 0.$$

Calculînd derivatele parţiale $\dfrac{\partial \bar{F}_j}{\partial p_n^k}$, se obţine forma explicită a ecuaţiei caracteristicilor sistemului (1.46):

$$\det\left[\frac{\partial \bar{F}_j}{\partial p_n^k}\right] = \det\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial p_k^i}\,\frac{\partial G}{\partial x_k}\right] = 0, \quad \|\nabla_n G\| > 0. \tag{1.48}$$

Explicit, ecuaţia caracteristicilor (1.48) se scrie

$$\Delta(G) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1^1}\dfrac{\partial G}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial p_2^1}\dfrac{\partial G}{\partial x_2} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial p_n^1}\dfrac{\partial G}{\partial x_n} & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1^m}\dfrac{\partial G}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial p_2^m}\dfrac{\partial G}{\partial x_2} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial p_n^m}\dfrac{\partial G}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1^1}\dfrac{\partial G}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial p_2^1}\dfrac{\partial G}{\partial x_2} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial p_n^1}\dfrac{\partial G}{\partial x_n} & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1^m}\dfrac{\partial G}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial p_2^m}\dfrac{\partial G}{\partial x_2} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial p_n^m}\dfrac{\partial G}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0,$$

iar soluţiile $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ale acestei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi se vor numi *caracteristicile* sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale (1.46).

Înlocuind derivatele parţiale $\dfrac{\partial G}{\partial x_j}$ prin ν_j, găsim ecuaţia

$$\det\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial p_k^i}\,\nu_k\right] = 0, \quad \|\nu\| = 1, \tag{1.48'}$$

unde $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ este versorul normalei la suprafaţa caracteristică; dacă $\mathbf{x}^0$ este o soluţie oarecare a ecuaţiei (1.48') iar $\mathbf{x}^0 \in D_n \subset \mathbb{R}^n$, atunci planul

$$(\boldsymbol{\nu}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j^0 (x_j - x_j^0) = 0,$$

care trece prin punctul $\mathbf{x}^0$, va fi plan tangent la suprafaţa caracteristică a sistemului (1.46) care trece prin acest punct [faptul că prin orice punct $\mathbf{x}^0 \in D_n$ trece o suprafaţă caracteristică se obţine imediat scriind $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C$ în (1.48) în loc de G şi determinînd $C \in \mathbb{R}$, astfel încît $G(\mathbf{x}^0) - C = 0$, deci $C = G(\mathbf{x}^0) = G(x_1^0, \ldots, x_n^0)$].

În baza teoremei Cauchy-Kovalevskaia, noţiunea de caracteristică este strîns legată de rezolvarea problemei Cauchy generală (1.47). Astfel, presupunînd că suprafaţa $G_1(\mathbf{x}) - x_n^0 = 0$ care conţine punctul $\mathbf{x}^0$ nu este caracteristică [deci $\Delta(G_1) \neq 0$ în punctul $\mathbf{x}^0$, ceea ce înseamnă că $\Delta(G_1) \neq 0$ într-o vecinătate a punctului $\mathbf{x}^0$], sistemul neliniar (1.46) se poate aduce la forma normală în raport cu derivatele $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n}$ şi atunci, în ipoteza analiticităţii datelor iniţiale şi a membrilor drepţi ai sistemului (scris sub forma normală) pe suprafaţa $G_1(x_1, \ldots, x_n) = x_n^0$ în vecinătatea lui $\mathbf{x}^0$, va exista o singură soluţie analitică a problemei Cauchy.

Dacă însă suprafaţa care poartă datele iniţiale este caracteristică, atunci problema Cauchy (1.47) sau nu există (dacă datele iniţiale $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sînt arbitrare) sau dacă există (ceea ce implică una sau mai multe relaţii existente între funcţiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$), nu este unic determinată.

În cazul existenţei soluţiei analitice, aceasta se caută de forma

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{\infty} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$$

iar coeficienții a_α (α fiind un multiindice) determinîndu-se din egalitățile

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha u(\mathbf{x}^0)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} u(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

prin utilizarea condițiilor inițiale și a sistemului dat.

Ca și în cazul ecuațiilor cu derivate parțiale, teorema Cauchy-Kovalevskaia asigură existența și unicitatea numai a soluțiilor analitice; această teoremă nu specifică nimic în legătură cu existența unor soluții neanalitice dar, la punctul imediat următor, vom vedea că în cazul ecuațiilor sau sistemelor de ecuații liniare, soluția analitică obținută prin această teoremă este singura posibilă.

De remarcat că în afara ipotezei de analiticitate, chiar dacă funcțiile analitice sînt înlocuite prin funcții indefinit derivabile, se poate întîmpla ca soluția problemei Cauchy să nu existe.

1.4. Teorema de unicitate Holmgren

Această teoremă asigură unicitatea soluției problemei Cauchy pentru ecuații sau sisteme de ecuații cu derivate parțiale. Pentru ușurința calculelor, vom avea în vedere cazul sistemelor liniare cu derivate parțiale de ordinul întîi, la care vom atașa o problemă Cauchy restrînsă iar variabila pentru care se dau condițiile inițiale va fi notată cu t. Prin urmare, se consideră sistemul liniar

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^l(t,\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{m} b_j^l(t,\mathbf{x})\,u_l(t,\mathbf{x}) + c_j(t,\mathbf{x}), \qquad (1.49)$$

$$j = 1, 2, \ldots, m,$$

și problema Cauchy

$$u_j(t,\mathbf{x})|_{t=0} = \varphi_j(\mathbf{x}), \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1.50)$$

pe care le vom transcrie sub formă matriceală

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{Lu} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \boldsymbol{\varphi}, \qquad (1.49')$$

unde $\mathbf{u}$, $\mathbf{c}$ și $\boldsymbol{\varphi}$ sînt matrice coloană iar $\mathbf{Lu}$ este operatorul din membrul al doilea al sistemului (1.49), mai puțin termenii liberi $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Teorema de unicitate a problemei Cauchy (1.50′) pentru ecuația matriceală (1.49′) va fi demonstrată dacă se arată, că, în ipoteza $\boldsymbol{\varphi} = 0$ și $\mathbf{c} = 0$, se obține numai soluția banală $\mathbf{u} = \mathbf{0}$; într-adevăr, dacă ar exista două soluții $\mathbf{u}^1$ și $\mathbf{u}^2$ ale problemei (1.49′), (1.50), atunci $\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$ va verifica ecuația $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{Lu}$, $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{0}$ și în baza ipotezei, se deduce $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ceea ce înseamnă $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2$.

Vom face ipoteza că problema Cauchy

$$u|_{t=t_0} = \varphi \qquad (1.51)$$

atașată ecuației

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \qquad (1.52)$$

admite cel puțin o soluție pentru orice $t_0 \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}$ și orice φ, și fie $S(t, t_0)$ operatorul care conduce de la elementul inițial φ la soluția u, adică

$$u(t) = S(t, t_0). \qquad (1.53)$$

Proprietățile operatorului S vor fi asemănătoare cu proprietățile matricei fundamentale pentru sistemele diferențiale (vezi cap. 9, vol. I) și ele sînt enunțate în rezultatul următor.

Teorema 1.4. *Sînt valabile relațiile următoare*:

$$S(t_0, t_0) = I,\ S^{-1}(t, t_0) = S(t_0, t), \qquad (1.54)$$

I fiind aplicația identică,

$$\frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} = LS(t, t_0), \qquad \frac{\partial S(t_0, t)}{\partial t} = -S(t_0, t)\,L. \qquad (1.55)$$

⌐ Deoarece $u(t) = S(t, t_0)$ este soluția problemei Cauchy (1.51) pentru ecuația vectorială (1.52), pentru $t = t_0$ se obține

$$\varphi = u(t_0) = S(t_0, t_0)\varphi$$

iar egalitatea $S(t_0, t_0)\varphi = \varphi$ fiind valabilă pentru orice φ, se deduce prima egalitate (1.54). Apoi, acum

$$u(t) = S(t, t_1)\,u(t_1),$$

dacă se consideră problema Cauchy $u|_{t=t_1} = u(t_1)$, unde $u(t)$ este definit prin (1.53), deoarece $u(t_1) = S(t_1, t_0)$, găsim

$$u(t) = S(t, t_1)S(t_1, t_0)\,\varphi\,;$$

comparînd cu (1.53), se deduce egalitatea

$$S(t, t_1)S(t_1, t_0) = S(t, t_0).$$

Pentru $t = t_0$ şi scriind t în loc de t_1, în baza primei egalităţi (1.54) se găseşte

$$S(t_0, t)\,S(t, t_0) = I, \tag{1.56}$$

ceea ce este echivalent cu a doua egalitate (1.54); derivînd în raport cu t egalitatea (1.56), se obţine

$$\frac{\partial S(t_0, t)}{\partial t}\,S(t, t_0) + S(t_0, t)\frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} = 0$$

sau, înmulţind la dreapta cu $S^{-1}(t, t_0)$,

$$\frac{\partial S(t_0, t)}{\partial t} = -\,S(t_0, t)\,\frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t}\,S^{-1}(t, t_0) \tag{1.56'}$$

Pe de altă parte, înlocuind $u(t) = S(t, t_0)\varphi$ în ecuaţia (1.52), se obţine egalitatea

$$\frac{\partial [S(t, t_0)\varphi]}{\partial t} = L\,[S(t, t_0)\varphi]$$

din care se deduce

$$\frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t}\,\varphi = [LS(t, t_0)]\,\varphi,$$

relaţie, care fiind valabilă pentru orice φ, arată că se verifică prima egalitate (1.55). Înlocuind $\dfrac{\partial S(t, t_0)}{\partial t}$ în (1.56') prin $LS(t, t_0)$, se va obţine şi a doua egalitate (1.55). ⌟

În baza rezultatelor din cap. 4, vol. II, operatorul formal adjunct al operatorului diferenţial $\dfrac{\partial}{\partial t} - L$ va fi $-\dfrac{\partial}{\partial t} - L^+$, unde L^+

este operatorul formal adjunct al operatorului L iar din existenţa soluţiei problemei Cauchy pentru operatorul

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L\right) u = 0$$

se poate obţine şi soluţia problemei Cauchy

$$v|_{t=t_0} = \psi \tag{1.51'}$$

pentru ecuaţia

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L^+\right) v = 0\,; \tag{1.52'}$$

această soluţie va fi

$$v(t) = S^+(t_0, t)\,\psi. \tag{1.57}$$

Într-adevăr, din a doua egalitate (1.55) se deduce

$$\left[\frac{\partial S(t_0, t)}{\partial t}\right]^+ = [-\,S(t_0, t)\,L]^+,$$

adică

$$\frac{\partial S^+(t_0, t)}{\partial t} = -\,L^+\,S^+(t_0, t),$$

ceea ce este tot una cu

$$\frac{\partial}{\partial t}\,[S^+(t_0, t)\,\varphi] = -\,L^+\,[S^+(t_0, t)\,\psi]$$

şi avînd în vedere (1.57), găsim

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\,L^+ v.$$

Cum $S^+(t_0, t_0) = I$, din (1.57) rezultă $v(t_0) = S^+(t_0, t_0)\psi = \psi$, deci se va verifica şi condiţia iniţială iar afirmaţia făcută este justificată. În acest mod avem rezultatul următor : ■

Teorema 1.5. *Dacă pentru orice* $t_0 \in [0, T]$ *problema Cauchy* (1.51) *pentru ecuaţia* (1.52) *admite o soluţie pentru orice* φ, *atunci şi*

problema Cauchy (1.51′) *pentru ecuația formal adjunctă* (1.52′) *corespunzătoare primei ecuații va admite o soluție și reciproc.*

⌜ Dacă prima parte a demonstrației este justificată prin calculele anterioare, reciproca se justifică imediat, deoarece plecînd inițial cu ecuația $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{L}^{+}\right) u = 0$, ecuația formal adjunctă va fi chiar ecuația (1.52), ținînd seama că $\mathrm{L}^{+\,+} = \mathrm{L}$. ⌟

Teorema 1.6. *Dacă problema Cauchy* (1.51′) *pentru ecuația* (1.52′) *admite întotdeauna o soluție, atunci problema Cauchy* (1.51) *pentru ecuația* (1.52) *va admite o singură soluție.*

⌜ Teorema 1.5 asigură existența soluției problemei Cauchy (1.51) pentru ecuația (1.52), pe baza existenței soluției problemei Cauchy pentru ecuația adjunctă și rămîne de justificat unicitatea soluției în cauză; dar, cum

$$\frac{\partial}{\partial t}(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

dacă $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{L}u$ și $\frac{\partial v}{\partial t} = -\mathrm{L}^{+} v$, găsim

$$\frac{\partial}{\partial t}(u, v) = (\mathrm{L}u, v) + (u, \mathrm{L}^{+} v) = 0,$$

deoarece $(u, -\mathrm{L}^{+} v) = -(u, \mathrm{L}^{+} v) = (\mathrm{L}u, v)$. Așadar, pentru orice t, produsul scalar $(u(t), v(t))$ este o constantă; deoarece $u(0) = 0$ (pentru a obține unicitatea), această constantă va fi nulă și $(u(t), v(t)) = 0$. Prin urmare, deoarece $v(t_0) = \psi$, ψ fiind arbitrar, rezultă

$$(u(t_0), \psi) = 0$$

pentru orice $t_0 \in [0, T]$ iar lema fundamentală a calculului variațiilor arată că neapărat $u(t_0) = 0$ pentru $t_0 \in [0, T]$. ⌟

Teorema de unicitate Holmgren nu este altceva decît teorema 1.6 adaptată la teorema Cauchy-Kovalevskaia în baza căreia sistemul formal adjunct al sistemului (1.49), va admite soluție pentru orice date inițiale (presupunînd coeficienții sistemului, termenii liberi și condițiile inițiale analitice); această soluție o putem presupune analitică într-un domeniu cilindric $[0, T[\times \mathcal{D}_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (utilizînd principiul prelungirii analitice, soluția analitică în vecinătatea lui $t = t_0$ se poate prelungi pînă la o soluție analitică în $[0, T[\times \mathcal{D}_n$, cu $T > 0$

suficient de unic). Produsul scalar utilizat în considerațiile anterioare va fi definit în mod natural prin

$$(u, v)_0 = (u, v) = \int_{\mathcal{D}_n} [u_1(t, \mathbf{x})\, v_1(t, \mathbf{x}) + \ldots + u_m(t, \mathbf{x})\, v_m(t, \mathbf{x})]\, d\mathbf{x}.$$

1.5. Clasificarea ecuațiilor și sistemelor de ecuații cu derivate parțiale

1.5.1. Transformările liniare din $\mathbb{R}^n$ și ecuația caracteristicilor

În legătură cu clasificarea ecuațiilor și sistemelor de ecuații parțiale, un rol important îl are comportarea membrului întîi al ecuației caracteristicilor (pe care îl vom numi *formă caracteristică* a ecuației sau sistemului considerat) față de transformările liniare nesingulare de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^n$. Aceste transformări au forma

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} x_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.58}$$

cu $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$ iar $\det [\alpha_{jk}] \neq 0$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ fiind noile variabile independente; vom nota prin $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n parametri reali iar cu ajutorul transformării (1.58) se pot defini și parametrii $\mu_1, \ldots, \mu_n$ punînd

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \lambda_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.58′}$$

Deoarece din (1.58) se deduce $\frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \alpha_{jk}$, avem

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ceea ce înseamnă că prin trecerea de la variabilele x la variabilele y derivatele parțiale $\frac{\partial}{\partial x_k}$ se înlocuiesc prin derivatele parțiale $\frac{\partial}{\partial y_j}$

exact la fel cum se face trecerea de la parametrii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ la parametrii $\mu_1, \ldots, \mu_n \left(\lambda_j \to \frac{\partial}{\partial y_j}, \ \mu_k \to \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$, utilizîndu-se transpusa matricei transformării (1.58).

În acest mod, dacă avem în vedere ecuația cu derivate parțiale

$$F\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right) = 0, \tag{1.36}$$

utilizînd ecuația caracteristicilor (1.44), vom obține următoarea formă caracteristică (în variabilele independente $\mathbf{y}$):

$$\Delta(G) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{jk}} \left(\sum_{j'=1}^{n} {}^{j'j} \frac{\partial G}{\partial y_{j'}}\right)\left(\sum_{k'=1}^{n} \alpha_{k'k} \frac{\partial G}{\partial y_{k'}}\right) = \tag{1.59}$$

$$= \sum_{j,j',k,k'=1}^{n} \alpha_{j'j}\, \alpha_{k'k} \frac{\partial F}{\partial p_{jk}} \frac{\partial G}{\partial y_{j'}} \frac{\partial G}{\partial y_{k'}},$$

iar în cazul sistemelor de ecuații cu derivate parțiale

$$F_j\left(\mathbf{x}, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{1.46}$$

se obține forma caracteristică

$$\Delta(G) = \det\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial p_k^l}\left(\sum_{j'=0}^{n} \alpha_{j'j} \frac{\partial G}{\partial y_{j'}}\right)\right] = \det\left[\sum_{k,j'=1}^{n} \alpha_{j'j} \frac{\partial F_j}{\partial p_k^l} \frac{\partial G}{\partial y_{j'}}\right] \tag{1.59'}$$

de asemenea în variabilele $\mathbf{y}$.

1.5.2. Forma caracteristică și clasificarea ecuațiilor și sistemelor de ecuații cu derivate parțiale

Cu ajutorul formei caracteristice a unei ecuații sau a unui sistem de ecuații cu derivate parțiale se poate realiza clasificarea punctuală a acestora.

Vom spune că o ecuație (sistem) cu derivate parțiale este de *tip parabolic* în punctul $\mathbf{x}^0 \in D_n$ dacă există o transformare liniară nesingulară (1.58) astfel încît forma caracteristică să fie degenerată, adică noua formă caracteristică să depindă de un număr mai mic decît n de parametri independenți.

Dacă forma caracteristică în studiu nu este degenerată (adică oricare ar fi transformarea liniară nesingulară (1.58) aplicată formei caracteristice, $\Delta(G)$ va depinde tot de n parametri arbitrari), atunci ecuația (sistemul) va fi de *tip eliptic* în punctul $\mathbf{x}^0$, dacă $\Delta(\mathbf{v}) = 0$, $\|\mathbf{v}\| = 1$, admite numai rădăcini complexe și va fi de *tip hiperbolic* (în punctul $\mathbf{x}^0$) dacă ecuația $\Delta(\mathbf{v}) = 0$, $\|\mathbf{v}\| = 1$, admite numai zerouri reale (care pot fi și egale între ele).

Ecuația (sistemul) în discuție va fi de tip parabolic, eliptic sau hiperbolic în $G_n \subset D_n$ dacă este de tip parabolic, eliptic, respectiv hiperbolic pentru orice $\mathbf{x}^0 \in D_n$; dacă $G_1 \subset D_n$, $G_2 \subset D_n$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ iar ecuația (sistemul) în cauză este de un tip în domeniul G_1 și de alt tip în domeniul G_2, atunci ecuația (sistemul) va fi de tip mixt în D_n.

În cazul ecuațiilor (sistemelor) neliniare cu derivate parțiale, coeficienții formei caracteristice depind și de soluția $u = u(\mathbf{x})$ considerată în punctul x^0, ceea ce evident, complică clasificarea acestora: dacă însă ecuațiile (sau sistemele) în discuție sînt aproape liniare, atunci clasificarea lor se realizează independent de orice soluție aleasă a acestora.

Exemple

1. Sistemul de ecuații

$$\left.\begin{aligned} a_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ a_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\}$$

are forma caracteristică

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} a_1\nu_1 + b_1\nu_2 & -\nu_2 \\ a_2\nu_1 + b_2\nu_2 & \nu_1 \end{vmatrix} = a_1\nu_1^2 + (b_1 + a_2)\nu_1\nu_2 + b_2\nu_2^2,\ \nu_1^2 + \nu_2^2 = 1,$$

din care se deduce că acest sistem va fi eliptic dacă

$$\delta = a_1 b_2 - \frac{(b_1 + a_2)^2}{4} > 0,$$

hiperbolic dacă $\delta < 0$ și parabolic dacă $\delta = 0$; în particular, dacă $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$ se obține sistemul Cauchy-Riemann și cum $\delta = 1$ acesta va fi de tip eliptic.

2. În cazul sistemului lui Dirac (vezi ex. 2, 1.2.3.3) deoarece

$$\Delta(\mathbf{v}) = (\nu_0^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2)^2,\ \ \nu_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1,$$

rezultă că este cazul unui sistem hiperbolic, $\Delta(\nu) = 0$ avînd rădăcini reale duble în raport cu $\nu_0 : \nu_0 = \pm 1/\sqrt{2}$.

2.5.3. Clasificarea și forma canonică a ecuațiilor aproape liniare cu derivate parțiale de ordinul al doilea

În cazul acestor ecuații, utilizînd teoria formelor pătratice se pot adînci unele rezultate din punctele anterioare; ecuațiile se scriu

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + a\left(\mathbf{x},\ u, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0, \tag{1.60}$$

coeficienții a_{jk} fiind funcții reale definite în domeniul $D_n \subset \mathbb{R}^n$, $a_{jk} = a_{kj}$. Forma caracteristică va fi

$$\Delta(\nu) = \sum_{j,\,k=1}^{n} a_{jk}\, \nu_j\, \nu_k \tag{1.61}$$

și va defini, în fiecare punct $\mathbf{x}^0$ din D_n, o formă pătratică. După cum este cunoscut, cu ajntorul transformării liniare convenabil alese

$$\nu_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\, \lambda_k,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

unde $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$, $\det [\alpha_{jk}] \neq 0$, forma caracteristică se poate reduce la forma canonică

$$\Delta(\nu) = \Delta(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\, \lambda_j^2 \tag{1.62}$$

unde $\varepsilon_j \in \{-1, 0, +1\}$.

Ecuația (1.60), prin aplicarea transformării $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$,

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}\, x_j,\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.63}$$

va lua forma

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} + A\left(\mathbf{y}, u, \frac{\partial u}{\partial y_j}\right) = 0, \tag{1.60'}$$

noii coeficienți A_{jk} avînd proprietatea că în punctul $\mathbf{y}^0 \in D_n$ considerat $\left(y_k^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}\, x_j^0,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ \mathbf{x}^0 \in D_n\right)$ satisfac condițiile

$$A_{jk} = 0 \text{ dacă } j \neq k,\ A_{jj} = \varepsilon_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Vom numi ecuația (1.60′) *forma canonică* în punctul $\mathbf{x}^0$ a ecuației aproape liniare (1.60) iar în baza clasificării din 1.5.2 vom putea spune în continuare că :

— Ecuația (1.60) este de tip *eliptic* în punctul $\mathbf{x}^0 \in D_n$ dacă toți ε_j din forma canonică (1.60′) sînt nenuli și de același semn, ceea ce înseamnă că forma caracteristică (1.61) este definită (pozitiv, dacă $\varepsilon_j = +1$, negativ, dacă $\varepsilon_j = -1$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

— Ecuația (1.60) este de tip *hiperbolic* în punctul $\mathbf{x}^0 \in D_n$ dacă toți ε_j sînt nenuli și de același semn, exceptînd cîțiva dintre acești ε_j, ceea ce înseamnă că forma caracteristică (1.61) este nedefinită.

Mai precis, vom spune că ecuația (1.60) este de tip *hiperbolic normal* în punctul $\mathbf{x}^0 \in D_n$, dacă toți ε_j sînt nenuli iar $n - 1$ dintre aceștia au același semn și de tip *ultrahiperbolic* dacă $n - p$ dintre valorile ε_j au un semn, ceilalți p dintre ε_j avînd semn contrar $2 \leqslant p \leqslant n-2$; cu alte cuvinte, în punctul $\mathbf{x}^0 \in D_n$, forma canonică a ecuației (1.50) va fi (făcînd abstracție de o renumerotare a indicelui lui ε_j)

$$\pm\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_{n-1}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}\right) + A = 0$$

în cazul tipului hiperbolic normal sau

$$\pm\left(\frac{\partial u^2}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_{n-p}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_{n-p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}\right) + A = 0$$

în cazul tipului ultrahiperbolic.

— Ecuația (1.60) va fi de tip *parabolic* în punctul $\mathbf{x}^0 \in D_n$ dacă forma canonică (1.60′) este astfel încît cel puțin unul dintre numerele ε_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, este nul; în acest caz forma canonică în punctul $\mathbf{x}^0$ va fi

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} + A = 0$$

cu $m < n$; dacă $m = n - 1$, $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_m$ iar în A apare efectiv $\frac{\partial u}{\partial y_n}$, ecuaţia (1.60) se va numi de tip *parabolic normal* în punctul considerat, iar dacă $m < n - 1$ ecuaţia (1.60) va fi de tip *ultraparabolic* în punctul $\mathbf{x}^0 \in D_n$.

În baza teoremei inerţiei, clasificările anterioare nu se modifică odată cu schimbarea transformării liniare (1.63).

Evident, dacă unul din tipurile enunţate anterior apare nu numai într-un punct $\mathbf{x}^0 \in D_n$ ci în toate punctele domeniului $G_n \subset D_n$, atunci tipul ecuaţiei va fi definit în G_n; apar astfel ecuaţii de tip eliptic în G_n (cazul cel mai simplu, dar şi cel mai important, este acela al ecuaţiei lui Laplace

$$\Delta_n u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

care este de tip eliptic în $\mathbb{R}^n$), ecuaţii de tip hiperbolic în G_n (cazul particular cel mai important fiind al ecuaţiei undelor din $\mathbb{R}^n$,

$$\Box_n u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_n u = 0$$

care este de tip hiperbolic normal în $\mathbb{R}^{n+1}$) sau ecuaţii de tip parabolic în G_n (ecuaţia tipică fiind ecuaţia căldurii din $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = 0$$

care este de tip parabolic în $\mathbb{R}^{n+1}$).

Ecuaţia (1.60) va fi de tip *mixt* în D_n dacă există $G_1, G_2 \subset D_n$ astfel încît în G_1 să fie de un tip iar în G_2 să fie de alt tip ($G_1 \cap G_2 = \emptyset$).

1.5.4. Forma canonică a ecuaţiilor aproape liniare cu derivate parţiale de ordinul al doilea şi cu două variabile independente

Una din problemele importante privind formele canonice ale ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea (liniare sau aproape liniare) este aceea a obţinerii formelor canonice nu într-un punct $\mathbf{x}^0 \in D_n$ ci în toate punctele $\mathbf{x} \in G_1 \subset D_n$, în G_1 ecuaţia (1.60)

avînd unul şi acelaşi tip. Evident, aceasta este posibil întotdeauna în cazul coeficienţilor constanţi, dar problema se pune şi în cazul coeficienţilor neconstanţi; un caz particular important este acela al determinării transformării nesingulare $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$,

$$y_j = g_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.62}$$

astfel încît după transformare, în variabilele $\mathbf{y}$ ecuaţia să se prezinte sub o formă cît mai simplă [adică un număr cît mai mare dintre coeficienţii A_{jk}, $j \neq k$, din forma canonică (1.60′) să se anuleze]. Cum $A_{jk} = A_{kj}$, avem în total $n(n-1)/2$ coeficienţi distincţi şi deoarece transformarea (1.62) conţine n funcţii arbitrare $g_1, g_2, \ldots, g_n$, dacă $n(n-1)/2 \leqslant n$, vom putea anula cel mult n dintre aceşti coeficienţi (nu pot fi anulaţi toţi coeficienţii derivatelor de ordinul al doilea deoarece aceasta ar conduce la concluzia că ecuaţia nu este de ordinul doi); ultima inegalitate admite $n = 2,3$ ca singure soluţii şi deci pentru $n = 3$ toţi coeficienţii A_{jk}, $j \neq k$, pot fi anulaţi. Cum în această ultimă situaţie coeficienţii A_{jj} rămîn arbitrari (în cazul parabolic unul sau doi dintre ei putînd fi nuli), pentru a obţine egalitatea şi a acestor coeficienţi vom fi obligaţi să luăm în consideraţie numai $n = 2$ (deci cazul ecuaţiilor cu derivate parţiale cu două variabile independente cînd printr-o transformare de forma

$$y_1 = g_1(x_1, x_2), \; y_2 = g_2(x_1, x_2) \tag{1.62′}$$

se poate anula singurul coeficient A_{jk} cu $j \neq k$ iar coeficienţii A_{11} şi A_{22} pot fi făcuţi egali).

Vom considera ecuaţia aproape liniară de ordinul al doilea cu două variabile independente scrisă sub forma

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tag{1.63}$$
$$+ d\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

funcţiile a, b şi c fiind definite într-un domeniu $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ avînd valori reale iar $f : D_2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; forma caracteristică va fi

$$\Delta(\mathbf{v}) = a\nu_1^2 + 2b\nu_1\nu_2 + c\nu_2^2, \nu_1^2 + \nu_2^2 = 0$$

şi notînd $\delta = b^2 - ac$, ecuaţia (1.63) va fi de tip eliptic dacă $\delta < 0$, de tip parabolic, dacă $\delta = 0$ sau de tip hiperbolic dacă $\delta > 0$.

Aplicînd transformarea (1.62′) ecuației (1.63) și scriind-o sub forma

$$\xi = \xi(x, y), \ \eta = \eta(x, y), \tag{1.64}$$

se va obține ecuația

$$A(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + C(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tag{1.63′}$$

$$+ D\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0,$$

în care

$$A = a\xi_x^2 + 2b\,\xi_x\,\xi_y + c\xi_y^2,$$

$$C = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\,\eta_y + c\eta_y^2, \tag{1.65}$$

$$B = a\xi_x\,\eta_x + b(\xi_x\,\eta_y + \xi_y\,\eta_x) + c\xi_y\,\eta_y;$$

se observă că dacă luăm în considerație forma caracteristică a ecuației (1.63) scrisă sub forma

$$\Delta(G) = a\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} + c\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2, \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 > 0,$$

avem $A = \Delta(\xi)$, $C = \Delta(\eta)$. De aceea ecuația (1.63′) va avea o formă simplă dacă se alege transformarea (1.64) astfel încît ξ și η să verifice ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi a caracteristicilor,

$$a\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} + c\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 = 0; \tag{1.66}$$

deci, dacă ecuația (1.63) este neparabolică, vor exista două soluții distincte ale ecuației caracteristicilor (1.66) care, în ipoteza că se caută soluții de formă explicită $G(x, y) = y - y(x)$, devine o ecuație diferențială

$$ay'^2 - 2by' + c = 0 \tag{1.66′}$$

care este echivalentă cu următoarele două ecuații scrise sub formă normală :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{\delta}}{a} = \frac{c}{b \mp \sqrt{\delta}} \tag{1.66″}$$

(luînd în considerație prima egalitate, dacă $a \neq 0$ sau a doua, dacă $a = 0$ [dacă a și b sînt nuli, atunci se poate considera ecuația (1.63) scrisă direct sub forma cea mai simplă)]. Scriind ecuațiile (1.66″) sub forma

$$y' = r_1(x, y), \ y' = r_2(x, y),$$

deoarece în baza relațiilor dintre rădăcinile și coeficienții ecuației (1.66′) avem egalitățile

$$r_1 + r_2 = \frac{2b}{a}; \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a},$$

se obțin egalitățile

$$A = a(\xi_x + r_1\,\xi_y)\,(\xi_x + r_2\,\xi_y),$$

$$C = a(\eta_x + r_1\eta_y)\,(\eta_x + r_2\,\eta_y), \tag{1.65′}$$

$$B = \frac{1}{2}a(\xi_x + r_2\xi_y)\,(\eta_x + r_1\,\eta_y) + \frac{1}{2}a(\xi_x + r_1\,\xi_y)\,(\eta_x + r_2\,\eta_y),$$

care pot înlocui egalitățile (1.65); se observă că $A = 0$, $C = 0$ dacă ξ, respectiv η se aleg astfel încît

$$\xi_x + r_1\,\xi_y = 0, \ \eta_x + r_2\eta_y = 0, \tag{1.67}$$

transformarea (1.64) cu acești ξ și η fiind nesingulară deoarece din ultimul sistem se deduce

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x\,\eta_y - \xi_y\,\eta_x = (r_2 - r_1)\,\xi_y\,\eta_y \neq 0$$

dacă $r_1 \neq r_2$ [ξ_y și η_y trebuie considerați nenuli deoarece altfel, din (1.67) s-ar deduce și $\xi_x = 0$ sau $\eta_x = 0$, deci ξ=const (η = const) pentru orice x și y din D_2, ceea ce ar fi echivalent cu forme inițiale simple ale ecuației (1.63)].

Prin urmare, în cazul hiperbolic ($\delta > 0$), caracteristicile ecuației (1.63) sînt două familii de curbe distincte din D_2 și deci raportînd ecuația la sistemul curbiliniu de coordonate definit prin aceste curbe, se obține ecuația

$$2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + D\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

cu $2B = (r_1 - r_2)^2 \xi_y \eta_y \neq 0$ [această egalitate se obține din (1.65) și (1.67)], adică după împărțire cu $2B$ se obține prima formă canonică a tipului hiperbolic pentru ecuația (1.63):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + D_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0. \qquad (1.68)$$

Cu transformarea nesingulară $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$ se obține din (1.68) a doua formă canonică pentru tipul hiperbolic al ecuației (1.63)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + D_1^*\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = 0. \qquad (1.68')$$

Dacă ecuația (1.63) este de tip parabolic, avem $r_1 = r_2$ și se deduce existența unei singure familii de caracteristici reale pentru această ecuație; deoarece ecuațiile (1.67) vor coincide, vom aplica transformarea (1.64) în care $\xi = \xi(x, y)$ verifică prima ecuație (1.67) [deci și pe a doua ecuație (1.67)] iar $\eta = \eta(x, y)$ se alege astfel încît $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$. Din egalitățile (1.65') rezultă $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, iar forma canonică în cazul parabolic al ecuației (1.63) este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Trecînd la considerarea tipului eliptic (deci $\delta = b^2 - ac < 0$) cînd ecuația caracteristicilor $\Delta(G) = 0$, $|G_x| + |G_y| > 0$, nu se poate verifica pentru nici o funcție G reală; fiind vorba de caracteristici complexe, vom scrie [în $G_2 \subset D_2$, avem $\delta(x, y) < 0$]

$$G(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$$

cu $\xi, \eta : G_2 \to \mathbb{R}$. Deoarece din ecuația $\Delta(G) = 0$ se deduce (luînd în considerare numai semnul minus de la $\pm\sqrt{\delta}$)

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\sqrt{\delta} - b}{a} \frac{\partial G}{\partial y} \qquad (1.69)$$

deoarece

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \xi_x + i\eta_x, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \xi_y + i\eta_y, \quad \sqrt{\delta} = i\sqrt{|\delta|},$$

separînd părțile reale și cele imaginare în (1.69), rezultă sistemul

$$\left.\begin{aligned} \xi_x &= -\frac{b}{a}\xi_y + \frac{\sqrt{|\delta|}}{a}\eta_y \\ \eta_x &= -\frac{b}{a}\eta_y - \frac{\sqrt{|\delta|}}{a}\xi_y \end{aligned}\right\} \qquad (1.69')$$

care, dacă este verificat de funcțiile ξ și η ale transformării (1.64) prin utilizarea, din nou, a egalităților (1.65'), arată că $A = C$, $B = 0$. Aceste ultime egalități se pot obține direct din ecuația

$$\Delta(G) = \Delta(\xi + i\eta) = 0$$

prin separarea părților reale și imaginare; evident $A \neq 0$, deoarece, în caz contrar am avea și $C = 0$ iar ecuația (1.63') nu ar fi de ordinul al doilea, ceea ce nu este posibil.

Așadar, în ipoteza că sistemul (1.69') admite soluții de clasă $C^1(G_2)$, $G_2 \subset D_2$ este domeniul în care $\delta < 0$, atunci forma canonică a tipului eliptic pentru ecuația (1.63) va fi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

sau

$$\Delta_2 u + D_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0,$$

Δ_2 fiind operatorul lui Laplace din $\mathbb{R}^2$; o discuție în legătură cu existența soluțiilor într-un domeniu $G_2 \subset D_2$ a sistemului (1.69'), care se numește *sistem Beltrami*, va fi făcută în 1.5.6.

Dacă a, b, c sînt funcții analitice în variabilele x și y, atunci funcțiile ξ și η din transformarea (1.64) vor fi partea reală, respectiv imaginară a funcției $f : G_2 \to C$, obținută prin integrarea ecuației diferențiale $y' = r_1(x, y)$.

Exemple 1. Ecuația

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se întîlnește în gazodinamica vitezelor apropiate de viteza sunetului și se numește *ecuația Tricomi*; forma caracteristică fiind

$$\Delta(G) = y\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2, \quad |G_x| + |G_y| > 0,$$

se deduce că pentru $y < 0$ ecuația este de tip hiperbolic iar pentru $y > 0$ este de tip eliptic.

Așadar, ecuația lui Tricomi este de tip mixt în $\mathbb{R}^2$, domeniul de hiperbolicitate fiind semiplanul inferior ($y < 0$) iar domeniul de elipticitate este semiplanul superior ($y > 0$).

Pentru $y < 0$, din $\Delta(G) = 0$ [cu $G = y - y(x)$] se deduce ecuația diferențială

$$y\, y'^2 + 1 = 0$$

sau

$$\sqrt{-y}\, y' - 1 = 0, \quad \sqrt{-y}\, y' + 1 = 0;$$

prin integrare se deduc funcțiile

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = -2\sqrt{-y} \neq 0,$$

curbele caracteristice din semiplanul $y < 0$ fiind $\xi(x, y) = \text{const.}$ $\eta(x, y) = \text{const.}$

Raportînd ecuația lui Tricomi la variabilele ξ și η, se obține forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0,$$

din care cu $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$ se deduce cealaltă formă canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{1}{3\beta}\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$$

Pentru $y > 0$, ecuația $\sqrt{y}\, y' + i = 0$ are coeficienții analitici, deci integrînd găsim

$$\frac{2}{3} y^{3/2} + ix = c$$

iar părțile reale și imaginare conduc la transformarea

$$\xi = x, \eta = \frac{2}{3} y^{3/2}, \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \sqrt{y} > 0$$

și se obține forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

2. Dacă se consideră ecuația liniară

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

a cărei formă caracteristică este

$$\Delta(\nu) = \nu_1^2 - 2x\nu_1\nu_2 + x^2\nu_2^2 = (\nu_1 - x\nu_2)^2, \ \nu_1^2 + \nu_2^2 = 1,$$

rezultă că ecuația este de tip parabolic în $\mathbb{R}^2$; cum ecuația caracteristicilor $\Delta(G) = 0$ se scrie

$$y' + x = 0,$$

caracteristicile vor fi parabolele

$$y = \frac{-1}{2} x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi = \frac{1}{2} x^2 + y, \eta = y, \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = -1 \neq 0$$

se obține forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Un calcul simplu arată că dacă în domeniul $G_2 \subset D_2$ ecuația (1.63) are un anumit tip, atunci prin transformări nesingulare ale variabilelor independente de forma

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y), \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

tipul ecuației nu se modifică; într-adevăr, cu această transformare se obține ecuația (1.63′) și prin utilizarea egalităților (1.65) se deduce egalitatea

$$B^2 - AC = (b^2 - ac)\left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\right]^2$$

și deci dacă $b^2 - ac$ are un anumit semn sau este nul, aceeași proprietate o va avea și funcția $B^2 - AC$ (în domeniul din $\mathbb{R}^2$ obținut din domeniul G_2 prin transformarea considerată).

În cazul ecuațiilor liniare

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ e(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u = f(x, y)$$

se obţin, prin transformarea (1.64) următoarele forme canonice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \alpha(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma(\xi,\eta)u = \delta(\xi, \eta)$$

sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \alpha(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma(\xi, \eta)u = \delta(\xi, \eta)$$

pentru tipul hiperbolic şi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \alpha(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma(\xi, \eta)u = \delta(\xi, \eta),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \alpha(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma(\xi, \eta)u = \delta(\xi, \eta)$$

pentru tipul eliptic, respectiv parabolic.

1.5.5. Forma canonică a ecuaţiilor liniare cu derivate parţiale de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi

În baza rezultatelor din 1.5.3., orice ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea şi cu coeficienţi constanţi se poate scrie sub forma

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + au = f(\mathbf{x}) \qquad (1.70)$$

cu a_j, $a \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; dacă $m=n$, această ecuaţie este neparabolică iar dacă $m<n$, ecuaţia este parabolică.

Cu ajutorul unor transformări simple implicînd introducerea unor noi funcţii necunoscute şi a unor noi variabile independente, ecuaţia (1.70) se poate scrie sub forma

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} - \sum_{k=p+1}^{q} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} = F_1(\mathbf{y}), \qquad (1.71)$$

unde $q \geqslant m$. Pentru aceasta, se efectuează iniţial schimbarea de funcţie

$$u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} a_j \varepsilon_j x_j\right)$$

care face ca ecuaţia (1.70) să se scrie

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} + \sum_{j=m+1}^{n} a_j \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_1 v = f_1(\mathbf{x}),\ a_1 = a - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j a_j^2 \qquad (1.70')$$

$\left(\text{deci dispar toate derivatele parţiale de ordinul întîi } \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)$; dacă $a_{m+1}, \ldots, a_n$ sînt nenuli, atunci scriind $x'_{m+1}, \ldots, x'_n$ în loc de $\frac{1}{a_{m+1}} x_{m+1}, \ldots, \frac{1}{a_n} x_n$, se obţine ecuaţia (scriind x_j în loc de x'_j)

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \pm \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_1 v = f_1 \qquad (1.70'')$$

(nu se poate presupune $a_{m+1}, \ldots, a_n$ egali cu zero deoarece în acest caz ecuaţia poate fi considerată ca avînd variabilele $x_{m+1}, \ldots, x_n$ parametri, variabilele efective fiind $x_1, x_2, \ldots, x_m$).

Introducînd variabila independentă x_0, scriind (cu a în loc a_1)

$$w(x_0, x_1, \ldots, x_n) = v(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\sqrt{|a|}\, x_0},$$

deoarece

$$a\ e^{\sqrt{|a|}x_0} v(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\left[e^{\sqrt{|a|}x_0} f(x_1, \ldots, x_n)\right] = \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2},$$

$\varepsilon_0 = \operatorname{sgn}(a)$ [$\operatorname{sgn}(x) = \pm 1$ dacă $x>0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$, dacă $x<0$], ecuaţia (1.70'') se scrie sub forma

$$\sum_{j=0}^{m} \varepsilon_j \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j} = f_2(x_0, \ldots, x_n) \qquad (1.72)$$

cu $f_2(x_0, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n)\ e^{\sqrt{|a|}\, x_0}$ $\left(\text{deoarece } \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} = e^{\sqrt{|a|}\, x_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2},\right.$ $\left. j=1, 2, \ldots, m\right)$. Înmulţind ecuaţia (1.72) cu $\exp(\xi_{m+1} + \xi_{m+2} + \ldots + \xi_n)$, $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_m$ fiind $n-m$ variabile independente noi şi notînd

$$v(x_0, \ldots, x_n, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_n) = w(x_0, \ldots, x_n) \exp(\xi_{m+1} + \ldots + \xi_n),$$

deoarece

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial \xi_j} = \exp(\xi_{m+1} + \ldots + \xi_n)\frac{\partial w}{\partial x_j},\ j = m+1, \ldots, n,$$

ecuația (1.72) se poate pune sub forma

$$\sum_{j=0}^{m} \varepsilon_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial \xi_j} = f_3(x_0, \ldots, x_n,\ \xi_{m+1}, \ldots, \xi_n)$$

iar dacă se efectuează schimbările

$$\alpha_j = x_j + \xi_j,\ \beta_j = x_j - \xi_j,\ j = m+1, \ldots, n,$$

deoarece $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_j^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta_j^2}$, scriind separat derivatele de ordinul al doilea care au coeficienții egali cu $+1$ și notînd variabilele respective prin $y_1, y_2, \ldots, y_p$ și cu $y_{p+1}, \ldots, y_q$ acele variabile $x_0, \ldots, x_m$, $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n$ care au coeficientul derivatei de ordinul al doilea egal cu -1, se va obține forma canonică (1.71). Prin urmare, pentru a se ajunge la forma canonică (1.71), sînt necesare $n - m + 1$ noi variabile dacă $a \neq 0$ și $n - m$ variabile independente noi dacă $a = 0$. Ecuația (1.71) va fi, în general, de tip ultrahiperbolic și de aceea, dacă se cunosc metode de integrare a acestui tip de ecuații, se va putea integra orice ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea cu coeficienți constanți; din păcate, studiul ecuației (1.71) este foarte dificil, așa că avantajul formei canonic (1.71) nu poate fi deocamdată fructificat.

În particular, o ecuație de tip eliptic cu coeficienți constanți care are forma canonică

$$\Delta_n u + au = f(\mathbf{x}),\ a \neq 0,$$

se poate scrie sub forma

$$\Delta_{n+1} v = f_1,$$

unde

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \exp(\sqrt{a}\, x_0)\, u(x_1, \ldots, x_n),$$

$$f_1(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \exp(\sqrt{a}\, x_0)\, f(x_1, \ldots, x_n),$$

dacă $a > 0$, sau sub forma

$$-\Box_n v = \Delta_n v - \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} = f_1,$$

dacă $a < 0$ (înlocuind în v și f_1 definiți anterior, $\sqrt{a}\, x_0$ prin $\sqrt{-a}\, x_0$); se pot utiliza uneori și variabile complexe, cînd nu va fi nevoie de făcut distincție între a pozitiv și a negativ.

O ecuație de tip parabolic normal avînd inițial forma canonică

$$\Delta_n u - \frac{\partial u}{\partial t} + au = f,$$

cu schimbarea de funcție

$$u(t, \mathbf{x}) = \exp(at)\, v(t, \mathbf{x}),\quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

se transformă în ecuația

$$\Delta_n v - \frac{\partial v}{\partial t} = f(t, \mathbf{x})\ \exp(-at)$$

din care se deduce ecuația de tip hiperbolic normal

$$\Delta_{n+1} w - \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} = f_1$$

prin înmulțire cu $\exp(\tau)$, scriind $\frac{\partial v}{\partial t}\exp(\tau) = \frac{\partial^2[v \exp(\tau)]}{\partial t\, \partial \tau}$ și trecînd la variabilele x_0 și x_{n+1} cu $x_0 = t - \tau$, $x_{n+1} = t + \tau$.

O ecuație de tip hiperbolic normal de forma

$$\Box_n u + au = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_n u + au = f$$

se poate transforma tot într-o ecuație de tip hiperbolic normal indiferent de semnul lui a (introducînd o variabilă complexă suplimentară dacă $a < 0$). Aceste forme canonice pot fi utilizate în special în cazul ecuațiilor de tip hiperbolic normal și de tip parabolic normal.

1.5.6. Sistemul Beltrami

La punctul 1.5.4, prin sistem Beltrami s-a înţeles sistemul

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{b}{a}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sqrt{|\delta|}}{a}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad |\delta| = ac - b^2 > 0, \tag{1.73}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\sqrt{|\delta|}}{a}\frac{\partial u}{\partial y},$$

care se poate scrie şi sub forma

$$\sqrt{|\delta|}\,u_x - cv_y + bv_x = 0,$$

$$\sqrt{|\delta|}\,u_y - bv_y + av_x = 0, \tag{1.74}$$

prin explicitarea derivatelor u_x şi u_y şi punînd $-y$ în loc de y.

Deoarece soluţiile sistemului (1.73) trebuie să realizeze o transformare bijectivă $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$, calculînd determinantul funcţional $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ se obţine, ţinînd seama de ecuaţiile sistemului,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\sqrt{|\delta|}}{a}(u_y^2 + v_y^2)$$

şi este evident nenul dacă u şi v nu sînt constante.

Existenţa soluţiilor analitice ale sistemului (1.73) se poate demonstra imediat cu ajutorul teoremei Cauchy-Kovalevskaia dacă se presupun funcţiile a, b şi c analitice în D_2, presupunînd date condiţiile iniţiale restrînse

$$u|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad v|_{x=x_0} = \psi(y),$$

φ şi ψ fiind funcţii analitice în punctul y_0. Soluţia analitică va exista în vecinătatea punctului $(x_0, y_0) \in D_2$ şi prin prelungire, se poate găsi un domeniu $G_2 \subset D_2$ (G_2 poate coincide cu D_2) în care u şi v, soluţiile sistemului (1.73), vor fi analitice; evident, aceste soluţii vor coincide cu partea reală, respectiv imaginară ale soluţiei complexe a ecuaţiei $y' = \dfrac{-b + i\sqrt{|\delta|}}{a}$.

Existenţa soluţiilor sistemului Beltrami (1.73), sau, ceea ce este totuna, ale sistemului echivalent (1.74) în cazul coeficienţilor a b, şi c neanalitici se poate demonstra cu ajutorul teoriei derivatei areolare (vezi cap. 5, vol. II).

Scriind $w = u + iv$, $w = w(z, \bar{z})$, se verifică uşor că sistemul Beltrami (1.74) este echivalent cu ecuaţia

$$\partial_{\bar{z}} w - q(z, \bar{z})\,\partial_z w = 0, \tag{1.75}$$

unde

$$q(z, \bar{z}) = \frac{c - \sqrt{|\delta|} + ib}{c + \sqrt{|\delta|} - ib} = \frac{c - a + 2ib}{c + a + 2\sqrt{|\delta|}}. \tag{1.75'}$$

Căutînd pentru ecuaţia (1.75) soluţii de forma (f fiind o funcţie convenabilă aleasă)

$$w_0(z, \bar{z}) = z - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{1.76}$$

deoarece

$$\partial_{\bar{z}} w_0 = f,$$

$$\partial_z w_0 = 1 - \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iint_G \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\,d\zeta = 1 - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta, \zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta,$$

ultima integrală improprie fiind convergentă în sensul valorii principale Cauchy şi se poate arăta că ea este de clasă $C^m(\bar{G})$ dacă $f \in C^m(\bar{G})$. Prin înlocuire în ecuaţia (1.75) a derivatelor $\partial_{\bar{z}} w$ şi $\partial_z w$, rezultă că funcţia f, definită prin (1.76), va face ca w să verifice ecuaţia în studiu dacă este soluţie a ecuaţiei integrale singulară

$$f(z, \bar{z}) + \frac{1}{\pi}q(z, \bar{z})\iint_G \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta = q(z, \bar{z}).$$

Se poate arăta că soluţia acestei ecuaţii există, putîndu-se obţine cu ajutorul aproximaţiilor succesive

$$f_0(z, \bar{z}) = g(z, \bar{z}),$$

$$f_{n+1}(z, \bar{z}) = q(z, \bar{z}) - \frac{1}{\pi}q(z, \bar{z})\iint_G \frac{f_n(\zeta, \bar{\zeta})}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

De asemenea, se poate arăta că în condiții suficient de generale pentru a, b și c (de exemplu, să fie integrabile), orice soluție a ecuației (1.75) se poate scrie sub forma

$$w(z, \bar{z}) = h[w_0(z, \bar{z})],$$

unde w_0 este definit prin (1.76) iar h este o funcție diferențiabilă de variabila complexă z.

Dacă în sistemul (1.74) coeficienții a, b și c sînt de clasă C^1, punînd condiția $u_{xy} = u_{yx}$, se obține ecuația liniară (cu $-y$ în loc de y)

$$av_{xx} + 2bv_{xy} + cv_{yy} + Av_x + Bv_y = 0,$$

$$A = a_x + b_y - \frac{1}{\sqrt{|\delta|}}(a|\delta|_x + b(|\delta|_y),$$

$$B = b_x + c_y - \frac{1}{\sqrt{|\delta|}}(b|\delta|_x + c|\delta|_y),$$

care este de tip eliptic ca și ecuația (1.63) de la care s-a plecat pentru a se ajunge la sistemul Beltrami (1.73); va fi suficientă o soluție v a acestei ecuații, pentru ca apoi determinînd u din (1.74) să găsim transformarea care reduce ecuația (1.63) la forma canonică (cu a, b, $c \in C^1$).

Exerciții și completări

1°. Să se arate că soluția ecuației

$$u_{xx} - xu_y = 0$$

care verifică datele Cauchy

$$u|_{x=0} = f(y), \quad u_x|_{x=0} = g(y)$$

se poate scrie

$$u(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^j(0)\, y^j + x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) y^j + x^3 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3!\, j!} f^{(j+1)}(0)\, y^j + \ldots,$$

dacă f și g sînt analitice.

2°. În ipoteza că f și g sînt funcții analitice în vecinătatea originii $x = 0$, $y = 0$, se cere soluția analitică a ecuației $u_{xx} - u_y = 0$ în condițiile Cauchy:

a) $u(x, y)|_{x=0} = f(y)$, $u_x(x, y)|_{x=0} = g(y)$,

b) $u(x, y)|_{y=0} = f(x)$, $u_y(x, y)|_{y=0} = g(x)$.

R. *a)* $u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{y^j}{j!} f^{(k+j)}(0) + x \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2k} y^j}{(2k+1)!\, j!} g^{(k+j)}(0).$

b) Soluția există numai dacă $g = f''$ și se scrie

$$u(x, y) = \sum_{j,\, k=0}^{\infty} \frac{1}{j!\, k!} f^{(j+2k)}(0)\, x^j y^k.$$

3°. Să se scrie soluția ecuației

$$u_{xx} - u_y = F(x)$$

care verifică $u|_{x=0} = f(y)$, $u_x|_{x=0} = g(y)$, F, f și g fiind funcții analitice în vecinătatea originii; caz particular $F(x) = e^x$, $f(y) = g(y) = e^y$.

R. Ecuația fiind liniară și neomogenă soluția se scrie sub forma

$$u = u_0 + u_p,$$

unde u_0 verifică ecuația omogenă $u_{xx} - u_y = 0$ și condițiile inițiale din enunț iar u_p verifică ecuația neomogenă și condiții inițiale nule: $u_p\Big|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial u_p}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$. Se verifică ușor că

$$u_p(x, y) = \int_0^x (x - t) F(t)\, dt$$

iar u_0 este determinat prin punctul *a)* al exercițiului 2.

Cazul particular indicat conduce la soluția $u(x, y) = e^{x+y} + e^x - x - 1$.

4°. Să se găsească soluția analitică a ecuației

$$u_{xx} - u_y = e^y$$

care verifică $u(x, y)|_{y=0} = e^x$.

R. $u(x, y) = e^{x+y} + e^y - 1$.

5°. Să se găsească soluția analitică a ecuației

$$u_{xx} - u_y = F(y)$$

care verifică datele Cauchy

$$u(x, y)|_{x=0} = f(y), \quad u_x(x, y)|_{x=0} = g(y),$$

F, f și g fiind analitice în vecinătatea originii.

Caz particular: $F(y) = \sin y$, $f(y) = \cos y$, $g(y) = \exp(y)$.

R. $u = u_0 + u_p$, u_p putînd fi funcție doar de y; se deduce

$$u_p(y) = -\int_0^y F(t)\,dt$$

iar u_0 verifică ecuația omogenă și condițiile Cauchy

$$u_0\Big|_{x=0} = f(y) + \int_0^y F(t)dt, \frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|_{x=0} = g(y)$$

și se obține din soluția exercițiului 2, a), înlocuind f prin $f(y) + \int_0^y F(t)dt$.

În cazul particular enunțat, $u(x, y) = \mathrm{sh}(x)\exp(y) + \cos y$.

6°. Se cere soluția analitică a ecuației

$$u_{xx} - u_y + au = 0, \qquad a \in \mathbb{R},$$

care verifică $u|_{x=0} = f(y)$, $u_x|_{x=0} = g(y)$.

R. Scriind $u(x,y) = e^{ay} v(x, y)$, se deduce că v verifică ecuația $v_{xx} - v_y = 0$ și condițiile $v|_{x=0} = f(y)\,e^{-ay}$, $v_x|_{x=0} = g(y)\,e^{-ay}$, deci v se obține, cu înlocuirile corespunzătoare, cu ajutorul exercițiului 2, a).

7°. Să se determine soluția analitică a ecuației

$$u_{xx} - u_y + bu_x + au = 0, \qquad a,\ b \in \mathbb{R},$$

care verifică $u\Big|_{x=0} = f(y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = g(y)$.

R. Se scrie $u(x, y) = \exp\left[-\frac{b}{2}x + \left(a - \frac{b^2}{4}\right)y\right] v(x, y)$ iar v este soluție a ecuației $v_{xx} - v_y = 0$, care verifică

$$v\Big|_{x=0} = f(y)\exp\left[\left(\frac{b^2}{4} - a\right)y\right], \quad v\Big|_{x=0} = g(y)\exp\left[\left(\frac{b^2}{4} - a\right)y\right] +$$

$$+ \frac{b}{2}\exp\left[\left(\frac{b^2}{4} - a\right)y\right] f(y).$$

8°. Dacă a este un număr real sau complex diferit de $0, -1, -2, \ldots$ atunci ecuația cu derivate parțiale

$$xu_{xx} + au_x - u_{yy} = 0$$

admite o singură soluție analitică astfel încît $u(x,y)|_{x=0} = f(y)$, f fiind analitică. Să se explice rezultatul.

R. Soluția căutată se scrie

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+a)} f^{(2k)}(y)\,x^k$$

și se obține derivînd succesiv ecuația și scriind apoi $x = 0$; se găsește

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{k+a}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\Big|_{x=0}\right).$$

Explicația existenței unei singure soluții analitice, deși se consideră o singură condiție Cauchy, este simplă: explicitînd ecuația în raport cu u_{xx}, scriind $u_{xx} = f$, f nu va fi analitică pentru $x = 0$, deci teorema Cauchy-Kovalevskaia nu este aplicabilă.

9°. Să se definească tipul și să se găsească forma canonică a ecuațiilor de mai jos, în care s-au utilizat notațiile lui Monge $p_{jk} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$.

a) $p_{11} + 2p_{12} - 2p_{13} + 2p_{22} + 6p_{33} = 0$.

b) $p_{11} + 2p_{12} + 2p_{22} + 4p_{23} + 5p_{33} = 0$.

c) $p_{11} - 4p_{12} + 2p_{13} + 4p_{22} + p_{33} = 0$.

d) $p_{11} + p_{12} + p_{34} = 0$.

e) $p_{11} + 2p_{12} - 2p_{13} + 2p_{22} + 2p_{33} = 0$.

f) $p_{11} - p_{22} + 4p_{12} - 2p_{23} + 6p_{13} = 0$.

g) $p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{34} = 0$.

h) $2p_{12} + p_{22} + 2p_{23} - 2p_{24} - 4p_{34} + p_{44} = 0$.

R. a) Forma caracteristică $A(y)$ se scrie

$$A(y) = y_1^2 + 2y_1y_2 - 2y_1y_3 + 2y_2^2 + 6y_3^2 = (y_1+y_2-y_3)^2 + (y_2+y_3)^2 + 4y_3^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2,$$

$$z_1 = y_1 + y_2 - y_3,\ z_2 = y_2 + y_3,\ z_3 = 2y_3$$

ecuația este de tip eliptic, forma canonică fiind $\Delta_3 u = 0$ cu transformarea $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = -x_2 + x_3$, $\xi_3 = x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3$, obținută făcînd transpusa matricei care conduce de la (y_1, y_2, y_3) la (z_1, z_2, z_3).

b) **Ecuație de tip eliptic**; forma canonică $\Delta_3 u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$

cu $$\xi_1 = x_1, \xi_2 = -x_1 + x_2, \xi_3 = 2x_1 - 2x_2 + x_3.$$

c) **Ecuație de tip hiperbolic normal**; forma canonică este

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} = 0,$$

$$\xi_1 = x_1 + \frac{1}{2} x_2 - x_3, \xi_2 = -\frac{1}{2} x_2, \xi_3 = x_3.$$

d) **Ecuația de tip ultrahiperbolic**; forma canonică este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial u^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_4^2} = 0, \ \xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = -x_1 + 2x_2, \ \xi_3 = x_3 + x_4, \xi_4 = x_3 - x_4.$$

e) **Ecuație de tip parabolic**; forma canonică este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} = 0, \quad \xi_1 = x_1, \xi_2 = -x_1 + x_2, \xi_3 = 2x_1 - x_2 + x_3.$$

f) **Ecuația de tip hiperbolic normal**; forma canonică este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} = 0, \ \xi_1 = x_2, \xi_2 = x_2 + x_3, \xi_3 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3.$$

g) **Ecuația de tip ultrahiperbolic**; forma canonică este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_4^2} = 0, \quad \xi_1 = x_1 + x_2, \xi_2 = x_1 - x_2, \xi_3 = -2x_2 + x_3 + x_4, \xi_4 = x_3 - x_4.$$

h) **Ecuație de tip hiperbolic**; forma canonică este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} = 0, \quad \xi_1 = x_2, \xi_2 = -x_2 + x_3, \xi_3 = 2x_2 - x_3 + x_4, \ \xi_4 = x_1 + x_2 + x_3.$$

10°. Să se aducă, la forma canonică din 1.5.5 următoarele ecuații liniare, cu derivate parțiale de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți:

a) $4 p_{11} - 4 p_{12} - 2 p_{23} + p_2 + p_3 = 0.$

b) $p_{12} - p_{23} + p_1 - p_2 - p_3 = 0.$

c) $p_{11} - 2p_{12} + 2 p_{22} - p_{23} + p_{34} - 2 p_1 = 0.$

d) $3 p_{11} + 2 p_{13} + p_{22} + 2 p_{23} + 2 p_{33} + 2 p_{34} + 2 p_{44} + 4 p_4 = 0.$

e) $p_{11} + 2 p_{12} + p_{22} + \sum_{j=3}^{n} k_j p_{jj} + 6 p_2 = 0, k_j > 0, j = 3,4,\ldots,n.$

R. a) $$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_3^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_4^2} = 0,$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2} x_1, \xi_2 = \frac{1}{2} x_1 + x_2, \xi_3 = -\frac{1}{2} x_1 - x_2 + x_3,$$

$$w = u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \exp\left(-\frac{1}{2} \xi_2 + \frac{1}{2} \xi_4\right).$$

b) $$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_3^2} = 0,$$

$$\xi_1 = x_2 + x_3, \ \xi_2 = -x_2 + x_3, \xi_3 = x_1 + x_3,$$

$$w = u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \exp(\xi_1 + \xi_2).$$

c) $$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_3^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_4^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_5^2} = 0,$$

$$\xi_1 = x_3 + x_4, \xi_2 = -x_3 + x_4, \xi_3 = x_1, \xi_4 = x_1 + x_2 + x_4,$$

$$w = u(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \exp(-\xi_3 - \xi_4 + \sqrt{2}\, \xi_5).$$

d) $$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_3^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_4^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_5^2} = 0,$$

$$\xi_1 = x_2, \xi_2 = -x_2 + x_3, \xi_3 = x_1 + x_2 - x_3, \xi_4 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4,$$

$$w = u(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \exp(2\xi_4 + 2\xi_5).$$

e) $$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z_2^2} + \sum_{j=3}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_j^2} = 0,$$

$$\xi_1 = x_1, \ \xi_2 = x_1 - x_2, \ \xi_j = \frac{1}{\sqrt{k_j}} x_j, \ j = 3,4,\ldots,n, \ \xi_2' = \frac{1}{6} \xi_2,$$

$$y_2 = \xi_2' + \xi_2'', \ z_2 = \xi_2' - \xi_2'', \ v = u \exp\left(\frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} z_2\right).$$

11°. Să se obțină tipul și formele canonice ale ecuațiilor de mai jos:

a) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3\ u_{yy} + u_y + a\,u_x = 0, \quad a \in \mathbb{R}$.

b) $u_{xx} + (a+b)\,u_{xy} + ab\,u_{yy} + A\,u_x + B\,u_y + C\,u = F(x, y)$,
$a, b, A, B, C \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

c) $y^2\ u_{xx} - x^2\,u_{yy} = 0$.

d) $4\ x^2\,u_{yy} - e^{2y}\,u_{xx} = 0$.

e) $u_{xx} - x\ u_{yy} - \dfrac{1}{2x}\,u_x = 0$.

f) $x\,u_{xx} - y\ u_{yy} = 0$.

g) $y^{2n}u_{xx} + x^{2n}u_{yy} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

h) $x^{2n}u_{xx} + y^{2n}u_{yy} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

i) $(1 + x^2)\,u_{xx} + (1 + y^2)\,u_{yy} + x\,u_x + y\,u_y + u = 0$.

j) $y^2\,u_{xx} + 2\,xy\,u_{xy} + 2\,x^2u_{yy} - \dfrac{y^2}{x}\,u_x - \dfrac{2x}{y}\,u_y = 0$.

k) $u_{xx} + 2a\,u_{xy} + a^2u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = 0, a, A, B, C \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

l) $y^2\,u_{xx} + 2y\,u_{xy} + x^2\,u_{yy} = 0$.

m) $x^{2n}u_{xx} + 2x^ny^nu_{xy} + y^{2n}u_{yy} + n\,x^{2n-1}\,u_x = 0$, $n > 1$.

n) $(\cos^2 x)\,u_{xx} + 2y(\cos x)\,u_{xy} + y^2\,u_{yy} = 0$.

o) $[\operatorname{sgn}(y)]\,u_{xx} + u_{yy} = 0$.

p) $u_{xx} + 2\,u_{xy} + [1 + \operatorname{sgn}(y)]\,u_{yy} = 0$.

r) $(a + x)\,u_{xx} + 2xy\,u_{xy} - y^2u_{yy} = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

R. a) Este o ecuație de tip hiperbolic în $\mathbb{R}^2$, având drept caracteristici familiile de drepte $x-y=c_1$, $3x+y=c_2$; forme canonice

$$u_{\xi\eta} + \left(a - \frac{1}{16}\right)u_\xi + \left(3a + \frac{1}{16}\right)u = 0, \quad \xi = x - y,\ \eta = 3x + y.$$

b) Este o ecuație de tip hiperbolic în $\mathbb{R}^2$, caracteristicile fiind $y - ax = c_1$, $y - bx = c_2$ iar forma canonică este

$$u_{\xi\eta} + \frac{a\,A - B}{(a-b)^2}\,u_\xi + \frac{b\,A - B}{(a-b)^2}\,u_\eta - \frac{C}{(a-b)^2}\,u = -\frac{1}{(b-a)^2}\,F\left(\frac{\xi - \eta}{b-a},\ \frac{\xi + \eta}{2}\right),$$

$$\xi = y - ax, \eta = y - bx.$$

c) Deoarece $\delta = x^2y^2$, ecuația este de tip hiperbolic în $\mathbb{R}^2$, exceptînd axele de coordonate; caracteristicile sînt curbele $y^2 + x^2 = c_1$, $y^2 - x^2 = c_2$, iar forma canonică este

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\,(\xi^2 - \eta^2)^{-1}(\eta u_\xi + \xi u_\eta) = 0, \quad \xi = y^2 - x^2, \eta = x^2 + y^2.$$

d) Avem $\delta = 4x^2\,e^{2y}$, deci ecuația este de tip hiperbolic în $\mathbb{R}^2$, exceptînd axa $x = 0$; caracteristicile sînt $x^2 + e^y = c_1$, $x^2 - e^y = c_2$, iar forma canonică se scrie

$$u_{\xi\eta} - \frac{\xi + 3\eta}{4(\xi^2 - \eta^2)}\,u_\xi + \frac{3\xi + \eta}{4(\xi^2 - \eta^2)}\,u = 0, \quad \xi = x^2 + e^y, \ \eta = x^2 - e^y$$

e) Aici $\delta = x$ și ecuația este de tip mixt în $\mathbb{R}^2$: este de tip hiperbolic dacă $x > 0$, avînd forma canonică

$$u_{\xi\eta} = 0, \xi = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + y, \eta = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - y$$

și de tip eliptic dacă $x < 0$, cu forma canonică

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{2}{3\xi}\,u = 0, \quad \xi = \frac{2}{3}\,(-x)^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = y.$$

f) Avem $\delta = xy$, deci în cadranele I și III din $\mathbb{R}^2$ este de tip hiperbolic iar în cadranele II și IV este de tip eliptic. Forma canonică va fi

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{\xi^2 - \eta^2}\,(\eta u_\xi - \xi u_\eta) = 0, \ \xi = \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}, \ \eta = \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}$$

în cazul hiperbolic și

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi}\,u_\xi + \frac{1}{\eta}\,u_\eta = 0, \quad \xi = \sqrt{|x|}, \quad \eta = \sqrt{|y|}.$$

g) $\delta = -x^{2n}\,y^{2n}$ și ecuația este de tip eliptic în $\mathbb{R}^2$, exceptînd axele de coordonate; forma canonică este

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{\xi}\,u_\xi + \frac{1}{\eta}\,u_\eta\right) = 0, \quad \xi = x^{n+1}, \eta = y^{n+1}.$$

h) $\delta = -x^{2n}\,y^{2n}$, ecuația fiind de tip eliptic în $\mathbb{R}^2$, exceptînd axele de coordonate; forma canonică este

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{\xi}\,u_\xi + \frac{1}{\eta}\,u_\eta\right) = 0, n > 1, \xi = x^{1-n}, \eta = y^{1-n}$$

sau

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_\xi - u_\eta = 0, \text{ dacă } n = 1, \ \xi = \ln|x|, \ \eta = \ln|y|.$$

i) $\delta = -(1 + x^2)\,(1 + y^2)$, ecuația fiind de tip eliptic în $\mathbb{R}^2$; forma canonică este

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u = 0, \xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \ \eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

j) $\delta = -x^2y^2$, ecuația este de tip eliptic în fiecare cadran din $\mathbb{R}^2$; forma canonică este

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0, \quad \xi = x^2, \quad \eta = x^2 - y^2.$$

k) $\delta = 0$, fiind o ecuație de tip parabolic în $\mathbb{R}^2$; forma canonică este

$$u_{\eta\eta} + \frac{B - aA}{a^2} u_\xi + \frac{B}{a^2} u_\eta + \frac{C}{a^2} u = 0, \quad \xi = y - ax, \eta = y.$$

l) $\delta = 0$, deci o ecuație de tip parabolic în $\mathbb{R}^2$; are forma canonică

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{2(\xi^2 - \eta^2)} (\xi u_\xi - \eta u_\eta) = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad \eta = \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

m) $\delta = 0$, o ecuație de tip parabolic în $\mathbb{R}^2$; are forma canonică

$$u_{\eta\eta} - n(n-1)\eta^{-n-1} u = 0.$$

n) $\delta = 0$, deci este o ecuație de tip parabolic în $\mathbb{R}^2$, avînd forma canonică

$$u_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} u_\xi = 0, \; \xi = y \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right), \quad \eta = y.$$

o) Este o ecuație de tip mixt în $\mathbb{R}^2$, fiind de tip eliptic dacă $y > 0$, avînd direct forma canonică $\Delta_2 u(x,y) = 0$ și de tip hiperbolic pentru $y < 0$, avînd forma canonică

$$u_{\xi\eta} = 0, \; \xi = x + y, \eta = x - y.$$

Axa $y = 0$ este o linie de parabolicitate pentru ecuație.

p) $\delta = -\operatorname{sgn} y$, deci este de tip mixt în $\mathbb{R}^2$; va fi de tip eliptic pentru $y > 0$, cu forma canonică

$$u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = 0, \quad \xi = x - y, \eta = x$$

iar pentru $y < 0$ ecuația este de tip hiperbolic, forma canonică fiind

$$u_{\xi\eta} = 0, \quad \xi = 2x - y, \eta = y.$$

Dreapta $y = 0$ este o linie de parabolicitate

r) $\delta = y^2(x^2 + x + a)$; dacă $a < \frac{1}{4}$, $y \neq 0$, ecuația $x^2 + x + a = 0$ admite două rădăcini reale și distrincte $x_1 < x_2$ și de aceea ecuația este de tip hiperbolic pentru $x < x_1$ și $x > x_2$ și de tip eliptic pentru $x_1 < x < x_2$, $y \neq 0$. Dreptele $x = x_1$, $x = x_2$ sînt linii de parabolicitate.

Dacă $a = \frac{1}{4}$, avem $\delta > 0$ pentru $y \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{2}$ și ecuația este de tip hiperbolic iar dacă $a > \frac{1}{4}$, ecuația va fi de tip hiperbolic în $\mathbb{R}^2$, dacă se exceptează linia de parabolicitate $y = 0$.

12°. Să se arate că în cazul formei canonice pentru tipul parabolic

$$u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)\,u_y + c\,(x,y)u = F(x,y),$$

printr-o schimbare de forma $u(x,y) = v(x,y)\exp(g)$ se poate determina g (în domeniul de regularitate a funcțiilor a, b, c și F), astfel încît ecuația dată să se scrie sub o formă mai simplă

$$v_{xx} + b(x,y)\,v_y + c_1\,(x,y)v = F_1(x,y).$$

R. Se găsește

$$g(x,y) = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(t,y)\,\mathrm{d}t$$

iar

$$c_1(x,y) = c(x,y) - \frac{1}{2}\frac{\partial a(x,y)}{\partial x} - \frac{1}{4}\,a^2\,(x,y) - \frac{1}{2}\,b(x,y)\int_{x_0}^{x}\frac{\partial a(t,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}t,$$

$$F_1(x,y) = F(x,y)\exp\left(\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(t,y)\,\mathrm{d}t\right).$$

13°. Să se arate că plecînd de la prima formă canonică a tipului hiperbolic

$$u_{xy} + a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y + c(x,y)u = F(x,y),$$

$a, b, c, F : D^2 \to \mathbb{R}$, $a, b \in C^1(D_2)$, dacă $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y}$, atunci prin schimbarea

$$u(x,y) = \exp[g(x,y)]\,v(x,y)$$

se poate determina g astfel încît ecuația să aibă forma mai simplă

$$u_{xy} + \mathrm{d}(x,y)u = F_1(x,y).$$

Ce se întîmplă în cazul celei de-a doua forme canonice

$$u_{xx} - u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = F(x,y)?$$

R. Din ipoteza $a_x = b_y$ rezultă că forma $b\mathrm{d}x + a\mathrm{d}y$ este diferențiala unei funcții f: $\mathrm{d}f = b\,\mathrm{d}x + a\,\mathrm{d}y$, adică, $b = f_x$, $a = f_y$ și ecuația devine

$$u_{xy} + (f_y u_x + f_x u_y) + c\,u = F;$$

cu schimbarea $u = v\exp(-f)$ se obține pentru v ecuația

$$v_{xy} + (c - f_x \cdot f_y - f_{xy})v = F\exp(f).$$

Așadar,

$$g(x,y) = -f(x,y), f(x,y) = \int_{x_0}^{x} b(t,y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} u(x_0,t)\mathrm{d}t, (x_0,y_0) \in D_2,$$

$$d = c - ab - \frac{\partial a}{\partial x}, \quad F_1 = F \cdot \exp(f).$$

În cazul celeilalte forme canonice, calculele se repeta, dar condiția $a_x = b_y$ trebuie înlocuită prin $a_y + b_x = 0$, deci $g = -\frac{1}{2} f$,

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y)\mathrm{d}t - \int_{y_0}^{y} b(x_0, t)\,\mathrm{d}t,$$

$$d = c - \frac{1}{2} a_x + \frac{1}{2} b_y - \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2, F_1 = F \exp\left(\frac{1}{2} f\right).$$

14°. În ecuația de tip eliptic scrisă sub formă canonică

$$u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x,y)u = F(x, y)$$

avem a, b, c, F, funcții definite pe $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ și cu valori reale iar a, $b \in C^1(D_2)$ astfel încît $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$. Să se arate că se poate determina funcția g, astfel încît ecuația pentru funcția v, unde

$$u(x, y) = v(x, y)\exp\,[g(x, y)],$$

are forma mai simplă

$$v_{xx} + v_{yy} + d(x, y)v = F_1.$$

R. Calcule analoage celor de la exercițiul 13 arată că

$$g = -\frac{1}{2} f,\ f(x, y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} b(x_0, t)\,\mathrm{d}t,$$

$$d = c - \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{2} a_x - \frac{1}{2} b_y, \quad F_1 = F \exp\left(\frac{1}{2} f\right).$$

15°. Cu ajutorul exercițiilor 13 și 14 să se obțină forme mai simple pentru ecuațiile:

a) $u_{xy} + a(y)\, u_x + b(x)\, u_y + c(x,y)u = F(x,y)$;

b) $u_{xx} - u_{yy} + a(x)\, u_x + b(y)u_y + c(x, y)u = F(x, y)$;

c) $u_{xx} + u_{yy} + a(x)\, u_x + b(y)\, u_y + c(x,y)u = F(x, y)$.

R. a) $v_{xy} - (c - ab)v = F_1, F_1 = F \exp\,(-g)$,

$$g(x, y) = -\int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{d}t - \int_{y_0}^{y} a(t)\,\mathrm{d}t;$$

b) $v_{xx} - v_{yy} + \left(c - \frac{1}{2} a' + \frac{1}{2} b' - \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) v = F_1$;

c) $v_{xx} + v_{yy} + \left(c - \frac{1}{2} a' - \frac{1}{2} b' - \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} b^2\right) v = F_1$.

CAPITOLUL 2

Metode de integrare în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale de ordin superior

2.1. Metode elementare de integrare

În volumele anterioare s-au elaborat metode de rezolvare pentru ecuații și sisteme de ecuații diferențiale și pentru ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi, existînd posibilitatea determinări efective, în unele situații, a oricărei soluții pentru aceste ecuații.

Pentru ecuații cu derivate parțiale de ordin superior, chiar și pentru ecuații foarte simple nu există metode generale de rezolvare, chiar și pentru probleme Cauchy; în cap. 1 al acestui volum s-a demonstrat existența soluției problemei Cauchy generale, soluțiile putînd fi obținute local, cu ajutorul unor dezvoltări în serii de puteri. În cap. 4, vol. II s-au obținut soluții globale (adică valabile într-un întreg domeniu) pentru anumite ecuații liniare cu derivate parțiale în condiții suplimentare convenabile (de obicei, condiții mixte); aceste soluții erau scrise tot sub formă de serii, dar serii de funcții proprii, care nu presupun analiticitatea coeficienților ecuațiilor sau a datelor suplimentare. Aceste metode însă nu au un caracter general și nici nu sînt aplicabile în orice condiții; din păcate, nu pot fi date metode generale de rezolvare ale ecuațiilor (sau sistemelor) cu derivate parțiale de ordin superior, dar în acest capitol, vom prezenta unele metode de rezolvare care pot acoperi cîteva din situațiile concrete care apar în practică.

Prin *soluție generală* în D_n a ecuației cu derivate parțiale de ordinul m

$$F\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0, \quad m_1 + \ldots + m_n = m, \tag{2.1}$$

se înțelege orice soluție $n \in C^m(D_n)$ care depinde de m funcții arbitrare $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ care depind de n-1 parametri

$$\varphi_j = \varphi_j(y_1, \ldots, y_{m-1}), \quad j = 1,2, \ldots, m.$$

Prin particularizarea funcțiilor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se obțin *soluții particulare* ale ecuației (2.1) care poate să admită soluții care nu provin prin particularizarea acestor funcții; de regulă, aceste ultime soluții se numesc soluții singulare ale ecuației în cauză [aceste soluții pot constitui suprafețe înfășurătoare ale unor familii de soluții ale ecuației date; ca de obicei, dacă $u = u(\mathbf{x})$ este o soluție a ecuației (2.1), atunci în $\mathbb{R}^{n+1}$ această soluție definește o *suprafață integrală* a ecuației și nu vom face distincție între soluție și suprafață integrală a unei ecuații date].

Din cap. 4, vol. II, rezultă că pot exista și soluții slabe sau generalizate pentru orice ecuație cu derivate parțiale și de aceea este dificilă orice încercare de obținere a tuturor soluțiilor a unei ecuații cu derivate parțiale; în acest volum vom avea în vedere mai ales ecuațiile cu derivate parțiale liniare și de ordinul al doilea, studiul cărora fiind suficient de complet.

Vom avea însă în vedere și posibilitatea integrării unor ecuații neliniare iar acest capitol este dedicat în întregime prezentării unor metode de obținere a soluțiilor (generale sau particulare) unor ecuații cu derivate parțiale, avîndu-se în vedere, în special, rezolvarea problemei Cauchy.

2.1.1. Metode de integrare directă a ecuațiilor cu derivate parțiale

Aceste metode reduc problema integrării unei ecuații cu derivate parțiale de ordin superior la integrarea unei ecuații diferențiale sau a unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi. În prima categorie intră ecuațiile de forma

$$F\left(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_j^m}\right) = 0,$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$; acestea se integrează ca o ecuație diferențială obișnuită, variabilă independentă fiind x_j, celelalte variabile $x_1, \ldots, x_{j-1}$, $x_{j+1}, \ldots, x_n$ fiind considerate parametrii și deci constantele de integrare vor fi funcții de acești parametri, obținîndu-se astfel soluția generală a ecuației date.

De exemplu, ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial u}{\partial x_1} - u = e^{x_1+x_2+\ldots+x_n}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),$$

admite soluția generală

$$u(\mathbf{x}) = \varphi_1(x_2, \ldots, x_n)e^{x_1} + \varphi_2(x_2, \ldots, x_n)e^{-x_1} + x_1\varphi_3(x_2, \ldots, x_n)e^{-x_1} + \frac{1}{4}x_1 e^{x_1+x_2+\ldots+x_n},$$

φ_1, φ_2 și φ_3 fiind funcții arbitrare în variabilele $x_2, x_3, \ldots, x_n$, deoarece ecuația diferențială

$$y''' + y'' - y' - y = A e^{x_1}$$

are soluția generală

$$y(x_1) = c_1 e^{x_1} + c_2 e^{-x_1} + c_3 x_1 e^{-x_1} + \frac{1}{4} x_1 A e^{x_1}.$$

În a doua categorie intră ecuațiile cu derivate parțiale de forma

$$F\left(\mathbf{x}, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_j^{m-1}}, \frac{\partial^m u}{\partial x_1 \partial x_j^{m-1}}, \frac{\partial^m u}{\partial x_2 \partial x_j^{m-1}}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{j-1} \partial x_j^{m-1}}, \frac{\partial^m u}{\partial x_j^m}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial^m u}{\partial x_{j+1} \partial x_j^{m-1}}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n \partial x_j^{m-1}}\right) = 0$$

deoarece substituția $v = \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial x_j^{m-1}}$ conduce la ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi

$$F\left(\mathbf{x}, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right) = 0;$$

dacă $v = v(x, \varphi_m)$ este soluția generală a acestui ecuații, atunci funcția

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(m-2)!}\int_{x_j^0}^{x_j} (x_j - t)^{m-2} v \, dx_j + \sum_{k=1}^{m-1} x_j^{k-1} \varphi_k(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

va fi soluția generală a ecuației inițiale.

De exemplu, dacă se consideră ecuația de ordinul al doilea

$$x_2x_3x_4\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+x_1x_3x_4\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+x_1x_2x_4\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_3}+x_1x_2x_3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_4}=0,$$

cu substituția $v=\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ se obține ecuația de ordinul întîi

$$x_2x_3x_4\frac{\partial v}{\partial x_1}+x_1x_3x_4\frac{\partial v}{\partial x_2}+x_1x_2x_4\frac{\partial v}{\partial x_3}+x_1x_2x_3\frac{\partial v}{\partial x_4}=0$$

a cărei soluție generală este

$$v=\varphi_1(x_1^2-x_2^2,\ x_2^2-x_3^2,\ x_3^2-x_4^2),$$

φ_1 fiind o funcție arbitrară (cu trei variabile independente); se deduce soluția generală

$$u(x_1,x_2,x_3,x_4)=\varphi_2(x_1,x_3,x_4)+\int_{x_2^0}^{x_2}\varphi_1(x_1^2-t^2,\ t^2-x_3^2,\ x_3^2-x_4^2)\,dt$$

a ecuației inițiale.

O altă posibilitate de a obține soluția generală a unei ecuații cu derivate parțiale liniare de un ordin oarecare este dată de metoda factorizării, pe care o vom prezenta succesiv, utilizînd unele cazuri particulare.

Vom considera operatorul diferențial liniar

$$Lu=a\,u_{xx}+2b\,u_{xy}+c\,u_{yy}+A\,u_x+B\,u_y+C\,u, \qquad (2.2)$$

unde $a, b, c, A, B, C\in\mathbb{R}$ și vom presupune existența operatorilor liniari de ordinul întîi

$$L_j=a_jD_x+b_jD_j+c_j,\quad D_x=\frac{\partial}{\partial x},\quad D_y=\frac{\partial}{\partial y},\quad j=1,2, \qquad (2.3)$$

$a_j,\ b_j,\ c_j,\in\mathbb{R}$, astfel încît

$$L=L_1L_2, \qquad (2.2')$$

înțelegînd prin L_1L_2u egalitatea $L_1(L_2u)$, adică

$$L_1(L_2u)=(a_1D_x+b_1D_y+c_1)(a_2D_xu+b_2D_yu+c_2u)=$$

$$=(a_1a_2)u_{xx}+(a_1b_2+a_2b_1)u_{xy}+(b_1b_2)u_{yy}+(a_1c_2+a_2c_1)u_x+$$

$$+(b_1c_2+b_2c_1)u_y+c_1c_2u=L_2(L_1u).$$

În această situație se spune că operatorul L definit prin (2.2) este *factorizat* (sau descompus în factori) cu ajutorul operatorilor L_1 și L_2 și atunci integrarea ecuației cu derivate parțiale

$$Lu=F \qquad (2.4)$$

se poate realiza cu ajutorul integrării a două ecuații cu derivate parțiale liniare și de ordinul întîi. Într-adevăr, scriind (2.4) sub forma $L_1(L_2u)=F$, notînd $L_2u=v$, se obține ecuația de ordinul întîi $L_1v=F$, care, odată integrată, permite determinarea funcției necunoscute u prin integrarea ecuației $L_2u=v$.

Ca exemplu, să considerăm ecuația de ordinul al doilea

$$u_{xx}-5u_{xy}+6u_{yy}=\sin(2x+y).$$

Avem evident

$$L_1=\frac{\partial}{\partial x}-2\frac{\partial}{\partial y},\quad L_2=\frac{\partial}{\partial x}-3\frac{\partial}{\partial y};$$

ecuația $L_1v=\sin(2x+y)$ se scrie

$$\frac{\partial v}{\partial x}-2\frac{\partial v}{\partial y}=\sin(2x+y)$$

și, prin integrare, se deduce

$$v(x,y)=x\sin(2x+y)+\varphi_1'(2x+y),$$

φ_1' fiind o funcție arbitrară de o variabilă. Integrînd ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=x\sin(2x-y)+\varphi_1'(2x+y),$$

se obține soluția generală a ecuației inițiale

$$u(x,y)=x\cos(2x+y)+\varphi_1^*(2x+y)+\varphi_2(3x+y),$$

φ_1^* și φ_2 fiind funcții arbitrare de o variabilă.

În cazul în care operatorii L_j au coeficienții constanți (deci $L_1L_2=L_2L_1$), dacă $L_1u_1=0$, rezultă $Lu_1=0$ (în baza liniarității lui L_1 și L_2 se deduce $Lu_1=L_2(L_1u_1)=L_20=0$) și analog, din $L_2u_2=0$, găsim $Lu_2=0$; Cum L este operator diferențial liniar în ipoteza că L_1 și L_2 sînt operatori diferențiali distincți, deci $L_2\neq AL_1$, $A\in\mathbb{R}$, dacă $u=\varphi_1$ și $u=\varphi_2$ sînt soluțiile generale ale ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul întîi $L_1u=0$ respectiv $L_2u=0$, atunci funcția $u=\varphi_1+\varphi_2$ va fi soluția generală a ecuației $Lu=0$. Cum

soluția generală a ecuațiilor de forma

$$\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$$

se scrie

$$u(x, y) = \exp\left(-\frac{\gamma}{\alpha} x\right) \varphi(\beta x - \alpha y)$$

[în ipoteza $\alpha \neq 0$; dacă $\alpha = 0$, avem

$$u(x, y) = \exp\left(-\frac{\gamma}{\beta} y\right) \varphi(x),$$

presupunînd $\beta \neq 0$ iar α și β nu pot fi simultan nuli], rezultă că în ipoteza $a_1 a_2 \neq 0$ soluția generală a ecuației $Lu = 0$ va fi

$$u(x, y) = \exp\left(-\frac{c_1}{a_1} x\right) \varphi_1(b_1 x - a_1 y) + \exp\left(-\frac{c_2}{a_2} x\right) \varphi_2(b_2 x - a_2 y),$$

φ_1 și φ_2 fiind, ca de obicei, funcții arbitrare. Dacă $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ (sau dacă $a_1 = 0$, $a_2 = 0$), în loc de a_1 (a_1 și a_2) la numitor apare b_1 (respectiv b_1 și b_2) iar dacă L_1 și L_2 sînt liniar dependenți, $L_1 = AL_2$, $A \in \mathbb{R}$, în ipoteza $a_1 \neq 0$, soluția ecuației $Lu = L_1^2 u = 0$ se va scrie

$$u(x, y) = \exp\left(-\frac{c_1}{a_1} x\right)[x\varphi_1(b_1 x - a_1 y) + \varphi_2(b_1 x - a_1 y)];$$

dacă $a_1 = 0$, se găsește

$$u(x, y) = \exp\left(-\frac{c_1}{b_1} x\right)[x\varphi_1(b_1 x) + \varphi_2(b_1 x)].$$

Este evident că această metodă se poate extinde și la ecuații de ordin superior sau la ecuații cu coeficienți variabili, dar nu orice ecuație de ordin superior poate fi factorizată; de asemenea, factorizarea este posibilă și în cazul unui număr oarecare de variabile independente. Dacă coeficienții ecuației (2.2) sînt constanți, atunci factorii L_1 și L_2 sînt permutabili ($L_1 L_2 = L_2 L_1$), proprietate care nu este, în general, valabilă pentru ecuații cu coeficienții variabili ($L_1 L_2 \neq L_2 L_1$).

O altă metodă care uneori permite obținerea soluției generale (în special, în cazul ecuațiilor cu două variabile independente) este reducerea la forma canonică, cînd, pentru forma canonică obținută este posibilă aplicarea unuia din procedeele indicate mai înainte, după modelul din exemplul următor.

Ecuația

$$u_{xx} - xu_{yy} - \frac{1}{2x} u_x = 0$$

este de tip hiperbolic dacă $x > 0$, cînd transformarea

$$\xi = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + y, \quad \eta = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - y$$

conduce la forma canonică $u_{\xi\eta} = 0$, a cărei soluție generală se scrie $u(\xi, \eta) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta)$ și deci soluția generală a ecuației inițiale va fi

$$u(x, y) = \varphi_1\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + y\right) + \varphi_2\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - y\right).$$

Dacă $x < 0$, ecuația este de tip eliptic; prin transformarea $\xi = \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$, $\eta = y$ se obține forma canonică

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{2}{3\xi} u = 0$$

pentru care însă artificiile anterioare nu sînt aplicabile.

În cazul ecuației cu derivate parțiale de forma

$$a_0 \frac{\partial^m u}{\partial x^m} + a_1 \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1} \partial y} + \ldots + a_k \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-k} \partial y^k} + \ldots + a_m \frac{\partial^m u}{\partial y^m} = 0, \quad (2.5)$$

în care coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sînt numere reale, dacă ecuația algebrică

$$a_0 + a_1 r + \ldots + a_k r^k + \ldots + a_m r^m = 0, \quad (2.6)$$

numită *ecuația caracteristică* a ecuației (2.5), admite numai rădăcini reale, atunci se verifică ușor că soluția generală a ecuației (2.5) se poate scrie sub forma

$$u(x, y) = \varphi_1(x + r_1 y) + \varphi_2(x + r_2 y) + \ldots + \varphi_m(x + r_m y), \quad (2.7)$$

dacă $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sînt rădăcinile ecuației (2.6) (presupuse distincte), $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ fiind ca de obicei funcții arbitrare (evident de clasă C^m). Dacă am avea $r_1 = r_2$, atunci în locul sumei $\varphi_1(x + r_1 y) + \varphi_2(x + r_2 y)$ se poate scrie suma $\varphi_1(x + r_1 y) + y\varphi_2(x + r_1 y)$, dacă $r_1 = r_2 = r_3$, suma primilor trei termeni din (2.7) se înlocuiește prin $\varphi_1(x + r_1 y) + y\varphi_2(x + r_1 y) + y^2\varphi_2(x + r_1 y)$ etc.

În particular, în cazul ecuației coardei vibrante

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$$

se obține soluția generală [deoarece ecuația (2.6) se scrie $a^2 - r^2 = 0$]

$$u(t, x) = \varphi_1(x + at) + \varphi_2(x - at).$$

Completări și exerciții

1°. Prin reducere la forma canonică se se găsească soluția generală a ecuațiilor cu derivate parțiale de mai jos:

a) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y + \frac{1}{16} u_x = 0$. *b)* $u_{yy} + 2u_{xy} - 3u_{xx} + 6u_x + 2u_y = 0$.

c) $u_{xx} + (a + b)u_{xy} + abu_{yy} + cu_x + acu_y = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

d) $u_{xx} + (a + b)u_{xy} + abu_{yy} + cu_x + bcu_y = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

e) $u_{xx} + 2\sin(x)u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} + \cos(x)u_y = 0$. *f)* $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$.

g) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + 2u_y - 2u = 0$. *i)* $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y + 2u = 0$.

h) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 2u_x + 2u_y + u = 0$. *j)* $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$.

R. *a)* $u(x, y) = \exp\left(\frac{y - x}{4}\right)\varphi_1(3x + y) + g(x - y)$.

b) $u(x, y) = \exp\left(\frac{x - 3y}{2}\right)\varphi_1(x + y) + g(3y - x)$.

c) $u(x, y) = \exp\left[\frac{c}{a - b}(y - ax)\right]\varphi_1(y - bx) + \varphi_2(y - ax)$.

d) $u(x, y) = \exp\left[\frac{c}{b - a}(y - bx)\right]\varphi_1(y - ax) + \varphi_2(y - bx)$.

e) $u(x, y) = \varphi_1(\cos x - 2x + y) + \varphi_2(\cos x + 2x + y)$.

f) $u(x, y) = \sqrt{xy}\,\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_2(x \cdot y)$, $xy > 0$.

g) $u(x, y) = \exp(-y)\varphi_1(y - 2x) + \exp\left(\frac{1}{2} y\right)\varphi_2(y - 2x)$.

h) $u(x, y) = \exp(-y)\,\varphi_1(x + y) + y\exp(-y)\,\varphi_2(x + y)$.

i) $u(x, y) = \varphi_1(y - x)\exp(-y)\cos(y) + \varphi_2(y - x)\exp(-y)\sin(y)$.

j) $u(x, y) = y\,\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

2°. Să se arate că printr-o schimbare de funcție necunoscută ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul al doilea de forma

$$F\left(x_1, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

pot fi reduse la ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi.

R. Se caută soluția sub forma $\frac{\partial u}{\partial x_1} = v(x_1, u)$ din care rezultă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + v\frac{\partial v}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j} \Big/ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial u}, \quad j = 2, 3, \ldots,$$

și deci se obține o ecuație cu două variabile independente x_1 și u, $F_1\left(x_1, u, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial u}\right) = 0$.

3°. Prin grupări convenabile să se integreze ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul al doilea de mai jos:

a) $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (*ecuația lui Ampère*).

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(u)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$ (*ecuația lui Goursat*).

c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{f'(u)}{f(u)}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + f(u)F(x, y)$ (*ecuația lui Desmoulin*).

d) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\,\mathrm{ch}(u)\frac{\partial u}{\partial x}$. *e)* $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \exp(u)F(x, y)$.

R. *a)* Ecuația se poate scrie și sub forma $\frac{\partial}{\partial y}\left(up - \frac{u}{q}\right) = -1$, $p = u_x$, $q = u_y$ deci $up - \frac{u}{q} + y = \varphi_1(x)$.

b) Ecuația se poate scrie $\frac{\partial}{\partial y}[\ln u_x - F(u)] = 0$, unde F este o primitivă pentru f, de unde se deduce $\varphi_1(x) + \varphi_2(y) = \int \exp(-F)\,du$.

c) Ecuația se scrie sub forma $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_x}{f(u)}\right] = F(x, y)$, deci

$$\int \frac{du}{f(u)} = \int dx \int F(x, y)\,dy + \varphi_1(x) + \varphi_2(y).$$

d) Ecuația se scrie $\frac{\partial}{\partial x}[u_y - 2\,\mathrm{sh}\,(u)] = 0$, deci $u_y = 2\,\mathrm{sh}\,(u) + \varphi_1(y)$ și se obține o ecuație diferențială, interpretînd x ca un parametru.

e) Ecuația se reduce la cazul *c*) cu $f(u) = \exp(u)$, căci $\frac{f'}{f} = 1$.

4°. În baza exercițiilor 12 și 13 de la sfîrșitul primului capitol, să se găsească soluția generală a ecuațiilor următoare :

a) $u_{xy} - u_x + 2u_y - 2u = 0$;

b) $u_{xy} + 2u_x - 3u_y - 6u = 0$;

c) $u_{xx} - u_{yy} + 9u_x - 9u_y = 0$;

d) $u_{xx} - u_{yy} - 6u_x - 4u_y + 5u = 0$;

e) $u_{xx} + 2u_x + u = 0$.

R. *a*) $u(x, y) = \exp(y - 2x)[\varphi_1(x) + \varphi_2(y)]$.

b) $u(x, y) = \exp(3x - 2y)[\varphi_1(x) + \varphi_2(y)]$.

c) $u(x, y) = \exp\left(-\frac{9}{2}x - \frac{9}{2}y\right)[\varphi_1(x + y) + \varphi_2(x - y)]$.

d) $u(x, y) = \exp(3x - 2y)[\varphi_1(x + y) + \varphi_2(x - y)]$.

e) $u(x, y) = \exp(-x)[\varphi_1(y) + x\,\varphi_2(y)]$.

5°. Utilizînd metoda factorizării, să se găsească soluția generală a ecuațiilor :

a) $u_{xx} - u_{yy} = 6x - 4\cos(2y)$; *b*) $u_{xx} - 7u_{xy} + 10u_{yy} = 12x^2$.

R. *a*) Notînd $L_1 = D_x - D_y$, $L_2 = D_x + D_y$, rezultă $L_1L_2u = u_{xx} - u_{yy} = Lu$ iar soluția generală a ecuației $Lu = F(x, y)$ se va scrie $u = u_h + u_p$, unde u_h este soluția generală a ecuației omogene $Lu_h = 0$, deci

$$u_h(x, y) = \varphi_1(x + y) + \varphi_2(x - y)$$

iar u_p este o soluție particulară a ecuației neomogene ; scriind $u_p(x, y) = f(x) + g(y)$, este suficient să se presupună f și g soluții particulare ale ecuațiilor diferențiale

$$f''(x) = 6x, \quad g''(y) = 4\cos 2y$$

și deci $f(x) = x^3$, $g(y) = -\cos 2y$; în final

$$u(x, y) = \varphi_1(x + y) + \varphi_2(x - y) + x^3 - \cos 2y.$$

b) Avem $L_1 = D_x - 2D_y$, $L_2 = D_x - 5D_y$ și se obține

$$u(x, y) = \varphi_1(2x + y) + \varphi_2(5x + y) + 2x^4.$$

6°. Dacă $L = L_1L_2$, $L_j = a_jD_x + b_jD_y + c_j$, $j = 1,2$, $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, să se găsească o soluție particulară u_p a ecuației $Lu = F(x, y)$, F fiind o funcție continuă.

R. Avem $L_2(L_1u_p) = F$, adică $L_2v = F$, $v = L_1u_p$; rezultă

$$v_p = \frac{1}{a_2}\int_0^x \exp\left[-\frac{c_2}{a_2}(x - t)\right] F\left[t, \frac{b_2}{a_2}(t - x) + y\right] dt$$

și deci u_p se găsește înlocuindu-l în membrul al doilea al lui v_p pe F prin v_p și punînd a_1, b_1 și c_1 în loc de a_2, b_2 și c_2 dacă $a_1 \cdot a_2 \neq 0$; dacă $a_2 = 0$, la numitor va apărea b_2 în locul lui a_2 etc.

7°. În baza exercițiului 6 să se obțină soluția generală a ecuațiilor cu derivate parțiale de mai jos :

a) $u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} = \sin(2x + y)$;

b) $4u_{xy} - u_{yy} = 1 + \cos y$;

c) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 4e^{3y} + \cos x$,

d) $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = -1 - x - y$.

R. *a*) $u(x, y) = \varphi_1(3x + y) + \varphi_2(2x + y) + x\cos(2x + y)$.

b) $u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x - 4y) + \frac{1}{2}y^2 - \cos y$.

c) $u(x, y) = \varphi_1(x + y) + x\,\varphi_2(x + y) + \frac{4}{9}e^{3y} - \cos(x)$.

d) $u(x, y) = f(x - y) + e^{-x}g(x + y) - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + y$.

8°. Prin metoda factorizării să se găsească soluțiile generale ale ecuațiilor :

a) $x^2u_{xx} + 2xy\,u_{xy} + y^2u_{yy} + 3x\,u_x\,3y\,u_y + u = 1$;

b) $y^2u_{xx} - 2y\,u_{xy} + u_{yy} - (2y + 1)u_y + 2u_y + u = (2x + y^2)^2$,

c) $x\,u_{xx} - (x + y)u_{xy} + y\,u_{yy} - 2x\,u_x + 2(1 + y)\,u_y + 2 = xy$,

d) $xy\,u_{xx} - x^2\,u_{xy} - y(x + y)u_x + x(1 - y)u_y + y^2u = y$.

R. *a*) Ecuația se scrie $(x\,D_x + y\,D_y + 1)^2u = 1$ iar soluția generală va fi

$$u(x, y) = 1 + \frac{1}{x}\ln(|x|)\,\varphi_1\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{x}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right).$$

b) Ecuația se scrie $(y\,D_x - D_y - 1)^2u = (2x + y^2)^2$, soluția generală fiind

$$u(x, y) = e^{-y}\varphi_1(2x + y^2) + y\,e^{-y}\varphi_2(2x + y^2) + (2x + y^2)^2.$$

c) Ecuația se scrie $L_1L_2u = xy$, $L_1 = D_x - D_y - 2$, $L_2 = x\,D_x - y\,D_y - 1$ iar soluția generală va fi

$$u(x, y) = \frac{x - y}{4} - \frac{xy}{2} - \frac{1}{4}\int_0^x t\, e^{2(x-t)}\, \varphi_1[t(x + y - t)]\, dt + e^{2x}\, g(x + y).$$

d) Ecuația se scrie $L_1L_2\, u = y$, $L_1 = x\,D_x - y$, $L_2 = y\,D_x + x\,D_y - y$, soluția generală fiind

$$u(x, y) = x^y\, \varphi_1(y) + x^y \int_{x_0}^{x} t^{-y-1}[e^t\, \varphi_2(t^2 - y^2) - 1]\, dt.$$

9°. Să se arate că soluția generală a ecuației

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se poate scrie sub forma

$$u(x, y) = \frac{1}{x}[\varphi_1(x + y) + \varphi_2(x - y)].$$

R. Deoarece $\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}(xu_{xx} + 2u_x) = \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xu)$, ecuația se scrie $(xu)_{xx} - (xu)_{yy} = 0$ și cu $v = xu$ se poate aplica ecuației $v_{xx} - v_{yy} = 0$ metodele anterioare și se găsește $v(x, y) = \varphi_1(x + y) + \varphi_2(x - y)$.

10°. Să se obțină, utilizînd exercițiul 9, soluția generală a ecuațiilor:

a) $u_{xy} + \frac{1}{x + y}(u_x + u_y) = 0$; *b*) $u_{xy} + \frac{1}{x - y}(u_y - u_x) = 0$.

R. *a*) Efectuînd schimbarea de variabile $x_1 = x + y$, $x_2 = x - y$ în ecuația de la exercițiul 9 scrisă sub forma $u_{xx} - u_{yy} + \frac{2}{x}u_x = 0$, se obține ecuația în cauză; deci soluția generală căutată este $u(x, y) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(y)}{x + y}$.

b) Această ecuație se reduce la ecuația a) scriind $-y$ în loc de y și, prin urmare, soluția generală va fi

$$u(x, y) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(y)}{x - y}.$$

11°. Să se arate că dacă $p = 0, 1, 2, \ldots$, atunci soluția generală a ecuației

$$xu_{xx} + \left(p + \frac{1}{2}\right)u_x - u_{yy} = 0$$

se poate scrie (dacă $x > 0$) sub forma

$$u(x, y) = \frac{\partial^p}{\partial x^p}[\varphi_1(2\sqrt{x} + y) + \varphi_2(2\sqrt{x} - y)].$$

R. Dacă $p = 0$, se obține ecuația

$$x\,u_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0$$

care, adusă la forma canonică prin schimbarea de variabile $\xi = 2\sqrt{x} + y$, $\eta = 2\sqrt{x} - y$ conduce la soluția generală

$$u(x, y) = \varphi_1(2\sqrt{x} + y) + \varphi_2(2\sqrt{x} - y).$$

Derivînd ecuația anterioară de p ori în raport cu x și notînd $v = \frac{\partial^p u}{\partial x^p}$, se va obține ecuația inițială.

12°. Să se arate că soluția generală a ecuației

$$u_{xy} + \frac{p + 1}{x + y}u_x + \frac{q + 1}{x + y}u_y = 0, \quad p, q = 0, 1, 2, \ldots,$$

este

$$u(x, y) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^q\, \partial x^p}\left[\frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(y)}{x + y}\right].$$

R. Scriind ecuația *a*) de la exercițiul 10 sub forma

$$(x + y)v_{xy} + v_x + v_y = 0,$$

după q derivări în raport cu x și p derivări în raport cu y, notînd $\frac{\partial^{p+q}v}{\partial x^q \partial y^p} = 0$, se obține ecuația din enunț.

13°. Să se arate că soluția generală a ecuației

$$u_{xy} - \frac{p + 1}{x - y}u_x + \frac{q + 1}{x - y}u_y = 0, \quad p, q = 0, 1, 2, \ldots,$$

se poate scrie sub forma

$$u(x, y) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^q\, \partial y^p}\left[\frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(y)}{x - y}\right].$$

R. Vezi exercițiile 10, b) și 12.

14°. Să se găsească soluția generală a ecuațiilor de la exercițiile 11, 12 și 13 în ipoteza că $p, q = -1, -2, -3, \ldots$

R. Derivînd ecuația

$$x\,u_{xx} + \left(-p + \frac{1}{2}\right)u_x - u_{yy} = 0, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

de p ori în raport cu x, se găsește ecuația

$$x\,v_{xx} + \frac{1}{2}\,v_x - v_{yy} = 0, \quad v = \frac{\partial^p u}{\partial u^p}$$

și deci soluția generală a ecuației date va fi

$$u(x, y) = \frac{1}{(p-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{p-1}[\varphi_1(2\sqrt{t} + y) + \varphi_2(2\sqrt{t} - y)]\,dt, \quad x > 0.$$

În cazul ecuației

$$u_{xy} + \frac{1-p}{x+y}\,u_x + \frac{1-q}{x+y}\,u_y = 0, \quad p,\ q = 1, 2, 3, \ldots,$$

după q derivări în raport cu x și p derivări în raport cu y [scriind ecuația sub forma $(x+y)u_{xy} + (1-p)u_x + (1-q)u_y = 0$] se găsește soluția generală

$$u(x, y) = \frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{q-1}\,dt \int_{y_0}^{y} (y-s)^{p-1}\,\frac{\varphi_1(t) + \varphi_2(s)}{t+s}\,ds$$

iar în cazul ecuației

$$u_{xy} - \frac{1-p}{x-y}\,u_x + \frac{1-q}{x-y}\,u_y = 0, \quad p,\ q = 1, 2, \ldots,$$

se obține soluția generală

$$u(x, y) = \frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{q-1}\,dt \int_{y_0}^{y} (y-s)^{p-1}\,\frac{\varphi_1(t) - \varphi_2(s)}{t-s}\,ds.$$

15°. Să se găsească soluția generală a următoarelor ecuații:

a) $u_{xx} + \frac{5}{2x}\,u_x - u_{yy} = 0$;

b) $u_{xx} - \frac{9}{2x}\,u_x - u_{yy} = 0$;

c) $u_{xx} + \frac{3}{x+y}\,u_x + \frac{2}{x+y}\,u_y = 0$;

d) $u_{xx} - \frac{2}{x+y}\,u_x - \frac{3}{x+y}\,u_y = 0$;

e) $u_{xx} + \frac{3}{x+y}\,u_x - \frac{4}{x+y}\,u_y = 0$;

f) $u_{xx} - \frac{2}{x-y}\,u_x + \frac{3}{x-y}\,u_y = 0$;

g) $u_{xx} + \frac{3}{x-y}\,u_x + \frac{3}{x-y}\,u_y = 0$.

R. Utilizînd exercițiile 11—14 în mod convenabil, se găsește:

a) $u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,[\varphi_1(2\sqrt{x} + y) + \varphi_2(2\sqrt{x} - y)], \quad x > 0.$

b) $u(x, y) = \frac{1}{4!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^4[\varphi_1(2\sqrt{t} + y) + \varphi_2(2\sqrt{t} - y)]\,dt, \quad x > 0,\ x_0 > 0.$

c) $u(x, y) = \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\left[\frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(y)}{x+y}\right].$

d) $u(x, y) = \frac{1}{3!4!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^4\,dt \int_{y_0}^{y} (y-s)^3\,\frac{\varphi_1(t) + \varphi_2(s)}{t+s}\,ds.$

e) $u(x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^5}{\partial x^5}\int_{y_0}^{y} (y-s)^2\,\frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(s)}{x+s}\,ds.$

f) $u(x, y) = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left[\frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(y)}{x-y}\right].$

g) $u(x, y) = \frac{1}{4!}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{y_0}^{y} (y-s)^4\,\frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(s)}{x-s}\,ds.$

16°. Dacă $L_a u = x\,u_{xx} + a\,u_x - u_{yy}$, $a \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, atunci printr-o transformare $u \to x^\alpha u$, ecuația

$$L_a\,u + \frac{b}{x}\,u = 0, \quad b \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$$

se poate reduce la o ecuație de forma $L_\beta u = 0$.

Să se stabilească egalitatea

$$L_a(x^{1-a}\,u) = x^{1-a}\,L_{2-a}\,u.$$

R. În ecuația $x\,u_{xx} + a\,u_x + \frac{b}{x}\,u - u_{yy} = 0$ se scrie $u = x^\alpha\,v$ și se obține ecuația

$$x\,v_{xx} + (2\alpha + a)v_x + \frac{1}{x}\,[\alpha(\alpha-1) + a\alpha + b]v - v_{yy} = 0$$

care va fi de forma $L_{a'}\,v = 0$, dacă a' se alege ca soluție a ecuației de gradul al doilea $\alpha(\alpha-1) + \alpha\,a + b = 0$.

Dacă $b = 0$, ecuația $\alpha(\alpha-1) + a = 0$ admite soluția $\alpha = 1 - a$ $(a \neq 1)$, deci $L_a(x^{1-a}\,u) = x^{1-a}\,L_{2-a}\,u$.

17°. Să se obțină soluția generală a ecuațiilor:

$a)\ u_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{16x^2}u = 0$; $b)\ u_{xx} - u_{yy} + \frac{2}{x}u_x + \frac{3}{16x^2}u = 0$;

$c)\ u_{xx} - u_{yy} - \frac{3}{x}u_x + \frac{55}{16x^2}u = 0.$

R. Cu ajutorul exercițiului 16 se găsește:

$a)\ u(x, y) = x^{\frac{1}{4}}\frac{\partial}{\partial x}[\varphi_1(2\sqrt{x} + y) + \varphi_2(2\sqrt{x} - y)\left(= x^{-\frac{1}{4}}\varphi_1(2\sqrt{x}+y) + x^{-\frac{1}{4}}\varphi_2(2\sqrt{x} - y)\right)$;

$b)\ u(x, y) = x^{-\frac{1}{4}}\frac{\partial}{\partial x}[\varphi_1(2\sqrt{x}+y) + \varphi_2(2\sqrt{x} - y)\left(= x^{-\frac{3}{4}}\varphi_1(2\sqrt{x}+y) + x^{-\frac{3}{4}}\varphi_2(2\sqrt{x} - y)\right)$;

$c)\ u(x, y) = x^{\frac{11}{4}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\varphi_1(2\sqrt{x} + y) + \varphi_2(2\sqrt{x} - y)]$.

2.2. Metode de liniarizare a ecuațiilor cu derivate parțiale

După cum s-a văzut în cap. 1, chiar și cele mai simple probleme ale practicii conduc la ecuații cu derivate parțiale neliniare; teoria integrării ecuațiilor cu derivate parțiale este însă dezvoltată în special pentru ecuații liniare cu derivate parțiale și de aceea un rol important revine posibilității transformării (dacă este posibil) ecuațiilor neliniare în ecuații liniare. Evident, nu poate exista o teorie generală relativ la această posibilitate și de aceea vom prezenta cîteva metode specifice utilizate în cazul unor ecuații care apar frecvent în teoria și practica ecuațiilor cu derivate parțiale, avînd în vedere nu cazuri generale ci anumite situații concrete.

2.2.1. Metoda separării variabilelor

Această metodă, expusă în cap. 4 din vol. II, este specifică ecuațiilor liniare cu derivate parțiale și se bazează pe faptul că în cazul unei aplicații liniare L, dacă $Lu_j = 0$, $j = 1,2,\ldots$, atunci $L(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots) = a_1 L u_1 + a_2 L u_2 + \ldots = 0$; totuși ecuația

cu derivate parțiale neliniară

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0, \quad m_1 + \ldots + m_n = n, \tag{2.8}$$

este astfel încît prin transformarea bijectivă de clasă C^m

$$u = f(v), \quad v = f^{-1}(u) \tag{2.9}$$

din ecuația (2.8) să se obțină ecuația liniară

$$L\,v = 0, \tag{2.10}$$

atunci dacă $v_1, \ldots, v_k$ sînt soluții particulare ale ecuației (2.10), funcțiile $u_j = f(v_j)$, $j = 1, \ldots, k$, sînt soluții particulare ale ecuației (2.8). Soluției $v = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j$ a ecuației (2.10) îi va corespunde soluția

$$u = f\left(\sum_{j=1}^{k} a_j v_j\right) \tag{2.11}$$

a ecuației (2.8), care se poate scrie și sub forma

$$u = f\left[\sum_{j=1}^{k} a_j f^{-1}(u_j)\right] \tag{2.12}$$

care exprimă principiul de bază al metodei separării variabilelor în cazul neliniar.

Exemple

1. Ecuația cu derivate parțiale

$$u_t = a\,u_{xx} - uu_x, \quad a \in \mathbb{R},\ a > 0, \tag{2.13}$$

se numește *ecuația Navier-Stokes unidimensională* și apare în studiul matematic al scurgerii lichidelor incompresibile sau al undelor de șoc nestaționare ale acestor lichide.

Punînd $u = v_x$, se obţine ecuaţia

$$v_{xt} = a\, v_{xxx} - v_x\, v_{xx},$$

care integrată în raport cu x, făcînd abstracţie de o funcţie arbitrară de variabila t, duce la ecuaţia neliniară

$$v_t + \frac{1}{2} v_x^2 = a\, v_{xx};$$

trecînd la noua funcţie necunoscută, w, unde $v = -2a \ln w$, $w = w(t, x)$, se deduce că w verifică ecuaţia căldurii

$$w_t = a\, w_{xx}.$$

Folosind acum rezultatele din cap. 4, vol. II referitoare la aceste ecuaţii, se obţin rezultate corespunzătoare pentru ecuaţia (2.14).

2. În probleme legate de descrierea unor procese staţionare în teoria difuziei, magnetostaticii, căldurii, apar ecuaţii de forma

$$\operatorname{div}[k(u)\operatorname{grad} u] = F(\mathbf{x}); \tag{2.14}$$

pentru $k(u) = 1$ se obţine ecuaţia Poisson

$$\Delta_n u = F \tag{2.15}$$

dar, în general, k nu este o constantă.

Ecuaţia (2.14) se poate liniariza cu ajutorul transformării (2.9) (numită de obicei, *transformarea lui Kirchoff*) prin alegerea convenabilă a funcţiei f; astfel, deoarece

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} f(v) = f'(v) \operatorname{grad} v,$$

presupunînd f definit prin ecuaţia diferenţială $f'(t)k[f(t)] = 1$, funcţia v va verifica ecuaţia Poisson (2.15).

În particular, dacă $k(u) = u^p$, $F = 0$, deci în cazul ecuaţiei

$$\operatorname{div}(u^p \operatorname{grad} u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u^p \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 \tag{2.14'}$$

transformarea lui Kirchoff va fi $u = f(v)$, f fiind soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$f'(t)\, f^p(t) = 1,$$

adică (cu $v_0 \in \mathbb{R}$)

$$f(v) = \sqrt[p+1]{(p+1)v + v_0}, \quad \text{dacă } p \neq -1,$$

$$f(v) = v_0\, e^v, \quad \text{dacă } p = -1;$$

noua funcţie necunoscută v se obţine ca soluţie a ecuaţiei Laplace $\Delta_n v = 0$ şi deci soluţia căutată va fi $u = f(v)$.

Pentru $n=2$, în ipoteza că ecuaţiei $\Delta_2 v = 0$ i se ataşează condiţia Dirichlet $v|_{\partial D_2} = g$, dacă ∂D_2 este cercul $x^2 + y^2 = R^2$, deoarece soluţia este dată de formula lui Poisson

(vezi cap. 4, vol. II)

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - x^2 - y^2)\, g(\xi, \eta)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}\, ds,$$

se obţine, pentru problema Dirichlet $u|_{\partial D_2} = h$ ataşată ecuaţiei (2.14'), următoarea soluţie:

$$u(x, y) = \left[(p+1)\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - x^2 - y^2)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \frac{h^{p+1}(\xi, \eta)}{p+1}\, ds\right]^{\frac{1}{p+1}}$$

(ds fiind elementul de arc pe cercul $x^2 + y^2 = 1$), dacă se presupune $v_0 = 0$ şi $p_0 \neq -1$. În mod corespunzător se tratează cazul $p = -1$, cînd se poate presupune $v_0 = 1$.

3. Ecuaţia neliniară cu derivate parţiale

$$u_{tt} - a\, \Delta_n u = \frac{f''(u)}{f'(u)} [a(\operatorname{grad} u)^2 - u_t^2]$$

se liniarizează cu ajutorul transformării lui Kirchoff (2.9) cînd se obţine ecuaţia undelor sferice

$$v_{tt} - a\, \Delta_n v = 0.$$

Evident, plecînd de la o ecuaţie liniară cu derivate parţiale

$$Lu = F,$$

prin aplicarea transformărilor de forma (2.9) se obţin diverse ecuaţii neliniare cu derivate parţiale, integrarea cărora nediferenţiindu-se practic de integrarea ecuaţiei liniare considerate.

2.2.2. Transformarea lui Boltzman

Transformarea lui Boltzman este utilizată în anumite cazuri pentru obţinerea unei ecuaţii diferenţiale verificate de soluţiile unei ecuaţii neliniare cu derivate parţiale cu două variabile independente. Vom exemplifica această posibilitate în cazul ecuaţiei căldurii neliniară, unidimensionale

$$a \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(u) \frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad a > 0, \tag{2.16}$$

prin introducerea variabilei independente y, legate de variabilele vechi x și t prin relația

$$y = x^\alpha t^\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{2.17}$$

și făcînd ipoteza că funcția necunoscută $u = u(t, x)$ devine funcție doar de noua variabilă y : $u = u(y)$. După unele calcule simple, din ecuația (2.16), prin aplicarea transformării (2.17) se deduce ecuația

$$a\beta \frac{x^2}{t} \frac{du}{dy} = \alpha(\alpha - 1)k(u)\frac{du}{dy} + \alpha^2 y \frac{d}{dy}\left[k(u)\frac{du}{dy}\right], \tag{2.16'}$$

care va fi o ecuație diferențială în funcția necunoscută u și variabila independentă y dacă factorul x^2/t se poate exprima cu ajutorul variabilei independente y, deci dacă

$$\frac{x^2}{t} = f(y) = f(x^\alpha t^\beta). \tag{2.17'}$$

Alegerea funcției f se face astfel încît ecuația transformată (2.16') să fie cît mai simplă posibil; or, dacă $f(y) = y^2$, din (2.17') rezultă

$$x^2 t^{-1} = x^{2\alpha} t^{2\beta},$$

deci se poate presupune $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$. Această determinare este avantajoasă deoarece membrul al doilea al ecuației (2.16') se simplifică considerabil pentru $\alpha = 1$ și se găsește ecuația diferențială

$$\frac{d}{dy}\left[k(u)\frac{du}{dy}\right] + \frac{a}{2} y \frac{du}{dy} = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{t}}. \tag{2.16''}$$

În particular, în cazul ecuației căldurii $[k(u) = 1]$, se găsește ecuația diferențială

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{a}{2} y \frac{du}{dy} = 0,$$

a cărei soluție generală va fi

$$u(y) = c_1 \int_{y_0}^{y} e^{-\frac{a}{4}s^2} ds + c_2,$$

adică

$$u(x,y) = c_1 \int_{y_0}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{a}{4}s^2} ds + c_2. \tag{2.18}$$

Aceste calcule pot servi pentru obținerea soluției fundamentale pentru ecuația căldurii sau chiar pentru integrarea ecuației (2.16) în cazul în care condițiile suplimentare atașate acesteia se pot reduce la condiții în care este posibilă integrarea ecuației diferențiale (2.16''); deoarece, de regulă, ecuația (2.16) se integrează cu ajutorul unei condiții inițiale și a două condiții la limită iar ecuația diferențială (2.16'') se integrează numai cu ajutorul a două condiții suplimentare (care pot fi condiții Cauchy sau condiții la limită), rezultă că, de regulă, nu poate exista concordanță între aceste date suplimentare.

Exemplul 4. În modelul care urmează, vom căuta să obținem concordanța dintre datele pentru ecuațiile (2.16) și (2.16''); vom presupune $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ și condițiile mixte

$$u(0, x) = u\,, \; u(t, 0) = u_1, \; u(t, \infty) = u_2, \; u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

verificate de slouția ecuației (2.16).

Deoarece $y = x/\sqrt{t}$, pentru $u = u(y)$, aceste condiții se scriu

$$u(\infty) = u_0, \; u(0) = u_1, \; u(\infty) = u_2$$

și deci dacă $u_0 = u_2$ (adică dacă la momentul inițial temperatura este egală cu temperatura pentru $x = +\infty$), condițiile suplimentare pentru ecuația cu derivate parțiale (2.16) nu sînt contradictorii cu condițiile suplimentare pentru ecuația diferențială (2.16''); aceasta înseamnă că în aceste condiții, integrarea ecuației (2.16) se poate realiza cu ajutorul soluției generale a ecuației diferențiale (2.16''), la care se atașează problema bilocală

$$u(0) = u_1, \; u(\infty) = u_2.$$

Dacă $y_0 = 0$, din (2.18) se deduce soluția

$$u(t, x) = u_1 + (u_0 - u_1)\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right),$$

unde erf este funcția erorilor

$$\mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-s^2} ds.$$

Pentru ecuațiile neliniare de forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

este uneori posibilă transformarea acestora în ecuații diferențiale de ordinul al doilea, printr-o dublă schimbare de variabile independente și de funcție necunoscută $(x, y) \to z$, $u(x, y) \to v(z)$,

$$z = a f(x) g(y), \quad u(x, y) = b h(x) k(y) v(z),$$

$a, b \in \mathbb{R}$, prin determinarea convenabilă a funcțiilor f, g, h și k.

2.2.3. Transformarea Legendre

Transformarea Legendre definește o schimbare simultană a variabilelor independente și a funcției necunoscute

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n), \quad u = u(\mathbf{x}) \leftrightarrow v = v(\mathbf{y}),$$

definită prin

$$\left.\begin{aligned} & v(y_1, \ldots, y_n) + u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = (x, y), \\ & y_j = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad x_j = \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial y_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

Transformarea Legendre nu este o transformare punctuală (adică între coordonatele $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ din $\mathbb{R}^n$) ci o transformare a variabilelor

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right);$$

(care definesc, în afară de punctul $x_1, \ldots, x_n$ de pe suprafața integrală $u = u(x)$ și planul tangent în acest punct la această suprafață) în variabilele

$$\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, v, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y_n}\right);$$

variabilele $(y_1, \ldots, y_n, v(y_1, \ldots, y_n))$ se numesc *tangențiale* în raport cu suprafața $u = u(\mathbf{x})$ iar (2.19) definește o transformare bijectivă dacă determinantul funcțional

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \det\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right], \quad u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

este nenul.

Aplicînd transformarea (2.19) unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea, funcția necunoscută u se înlocuiește prin funcția

v cu ajutorul primei egalități (2.19), $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ se înlocuiește prin $y_j, j = 1, \ldots, n$, iar derivatele parțiale de ordinul al doilea $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ se pot obține derivînd egalitățile

$$y_j = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad j = 1,2, \ldots, n,$$

în raport cu y_k, $k = 1,2, \ldots, n$; se obțin egalitățile

$$\delta_{jk} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_k}, \quad j, k = 1,2, \ldots, n,$$

care, deoarece $x_l = \frac{\partial v}{\partial y_l}$, se transcriu

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k} = \delta_{jk},$$

ceea ce înseamnă că matricea $\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right]$ este inversa matricei $\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_k}\right]$, căci

$$\det\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_k}\right] \cdot \det\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right] = \det[\delta_{jk}] = 1.$$

Așadar derivatele parțiale $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ se pot calcula cu ajutorul elementelor matricei inverse matricei $\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}$.

Dacă $n = 2$, din (2.19) se obține transformarea Legendre corespunzătoare

$$\left.\begin{aligned} & v(\xi, \eta) + u(x, y) = x\xi + y\eta \\ & \xi = u_x, \eta = u_y \\ & x = v_\xi, \ y = v_\eta \\ & u_{xx} = \frac{v_{\eta\eta}}{d}, \ u_{xy} = -\frac{v_{\xi\eta}}{d}, \ u_{yy} = \frac{v_{\xi\xi}}{d}. \\ & d = v_{\xi\xi} v_{\eta\eta} - v_{\xi\eta}^2, \frac{1}{d} = u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.19'}$$

Prin urmare, ecuația cu derivate parțiale

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

după aplicarea transformării Legendre (2.19′) devine

$$G(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta, v_{\xi\xi}, v_{\xi\eta}, v_{\eta\eta}) = 0,$$

unde

$$G = F\left(v_\xi, v_\eta, \xi v_\xi + \eta v_\eta - v, \xi, \eta, \frac{v_{\eta\eta}}{v_{\xi\xi}v_{\eta\eta} - v_{\xi\eta}^2}, \frac{-v_{\xi\eta}}{v_{\xi\xi}v_{\eta\eta} - v_{\xi\eta}^2}, \frac{v_{\xi\xi}}{v_{\xi\xi}v_{\eta\eta} - v_{\xi\eta}^2}\right).$$

Exemplul 5. Să luăm, pentru exemplificare, ecuația cu derivate parțiale

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0,$$

care în cap. 1 a fost numită ecuația cu derivate parțiale a suprafețelor minimale ; aplicînd transformarea Legendre (2.19′), se deduce ecuația

$$(1 + \eta^2)v_{\eta\eta} + 2\xi\eta v_{\xi\eta} + (1 + \xi^2)v_{\xi\xi} = 0,$$

care spre deosebire de ecuația inițială (care este neliniară) este o ecuație cu derivate parțiale liniară și de tip eliptic, deoarece $b^2 - ac = \xi^2\eta^2 - (1 + \xi^2)(1 + \eta^2) = -1 - \xi^2 - \eta^2 < 0$.

După cum rezultă din acest exemplu, pentru anumite ecuații cu derivate parțiale neliniare, prin aplicarea transformării lui Legendre (2.19), ecuația transformată poate fi liniară și de aceea această transformare poate fi un instrument eficace în integrarea unei clase de ecuații neliniare cu derivate parțiale.

2.2.4. Liniarizare prin metoda hodografului

Prin transformare *hodograf* se înțelege orice transformare în care variabilele independente și funcțiile necunoscute își permută rolurile ; astfel dacă $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ este o transformare de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}^2$, prin transformarea hodograf corespunzătoare se presupun u și v variabile independente iar x și y vor fi funcții de variabile u și v, deci

$$x = x(u, v), y = y(u, v)$$

Notînd ($J = J(x, y), j = j(u, v)$)

$$J = u_x v_y - u_y v_x, j = x_u y_v - x_v y_u,$$

avem $J \cdot j = 1$ și calcule simple conduc la egalitățile

$$u_x = J\, y_v,\ v_y = -J\, y_u,$$

$$u_y = -J\, x_v, v_y = J\, x_u,$$

care constituie formulele de înlocuire a derivatelor parțiale u_x, u_y, v_x și v_y prin derivatele parțiale x_u, x_v, y_u, y_v ; analog se pot calcula și derivatele de ordin superior.

Exemple 6. În gazodinamica gazelor ideale apare sistemul de ecuații neliniare

$$v_x - u_y = 0,$$

$$[u^2 - a^2(u, v)]\, u_x + uv(u_y + v_x) + [v^2 - a^2(u, v)]\, v_y = 0,$$

care, prin transformarea hodograf se liniarizează, obținîndu-se sistemul

$$x_v - y_u = 0,$$

$$[a^2(u, v) - u^2]\, y_v + uv(x_v + y_u) + [a^2(u, v) - v^2]\, x_u = 0.$$

Introducînd funcția $w = w(u, v)$, definită cu ajutorul sistemului

$$\frac{\partial w}{\partial u} = x, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = y,$$

prima ecuație a sistemului se verifică automat iar w va verifica ecuația liniară cu derivate parțiale

$$[a^2(u, v) - u^2]\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + 2uv\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + [a^2(u, v) - v^2]\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$$

care este de tip hiperbolic dacă $u^2 + v^2 > a^2(u, v)$, de tip eliptic dacă $u^2 + v^2 < a^2(u, v)$ și de tip parabolic dacă $a^2(u, v) = u^2 + v^2$.

7. Ecuația cvasiliniară de tip hiperbolic

$$w_{tt} - a^2(w_x)w_{xx} = 0$$

care apare în studiul vibrațiilor longitudinale ale firelor elastice, se transformă în sistemul

$$u_t - v_x = 0, \qquad v_t - a^2(u)\, u_x = 0$$

dacă se scrie $u = w_x$, $v = w_t$. Aplicînd transformarea hodograf, se obține sistemul liniar

$$x_v - t_u = 0, \qquad x_u - a^2(u)\, t_v = 0,$$

care conduce, prin eliminarea lui x la ecuația de tip hiperbolic

$$t_{uu} - a^2(u)zt_{vv} = 0.$$

2.3. Transformările integrale și teoria ecuațiilor cu derivate parțiale

Una din aplicațiile practice deosebit de importante ale transformărilor integrale, care justifică dealtfel studiul acestora, se referă la posibilitatea rezolvării unor probleme date (probleme Cauchy, probleme la limită, probleme mixte) pentru ecuații liniare cu derivate parțiale; soluțiile căutate se obțin fie sub formă finită (cînd soluția este explicit exprimată cu ajutorul coeficienților ecuației și a datelor problemei), fie sub formă integrală (care este de fapt situația generală).

Vom prezenta modul în care se aplică transformările integrale în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale prin cîteva exemple concrete.

2.3.1. Transformarea Fourier și integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale

Vom prezenta mai întîi formulele de bază din teoria acestei transformări (vezi cap. 7, vol. I); dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este astfel încît integrala improprie cu parametru $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \exp\ (i\xi x)\ dx$ este convergentă pentru orice $\xi \in \mathbb{R}$, atunci notînd

$$F[f(x)]\,(\xi) = F_e[f(x)]\,(\xi) = \hat{f}(\xi) = \hat{f}_c(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix\xi} dx, \quad (2.20)$$

$\hat{f}$ (sau $\hat{f}_e$) se numește *transformarea Fourier (exponențială)* a funcției f. Dacă f este continuă pe porțiuni și absolut integrabilă în $\mathbb{R}$, atunci are loc formula inversă

$$f(x) = \frac{1}{2}\,[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{-ix\xi} d\xi. \quad (2.20')$$

În cazul mai multor dimensiuni, notînd

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} = x_1 \xi_1 + \ldots + x_n \xi_n \qquad (= (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))$$

dacă $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, atunci transformarea Fourier se scrie

$$F[f(x)]\,(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\, d\mathbf{x} =$$

$$= \int \ldots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{i(x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n)} dx_1 \ldots dx_n, \quad (2.21)$$

formula inversă fiind

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{-i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\xi \quad (2.21')$$

[egalitatea avînd loc aproape peste tot, dacă $f \in L_1\ (\mathbb{R}^n)$ sau $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$].

Transformarea Fourier prin cosinus, $F_c[f(x)]\,(\xi) = \hat{f}_c(\xi)$ se scrie

$$\hat{f}_c(\xi) = \int_0^{\infty} f(x)\ \cos(x\xi)\, dx, \quad (2.22)$$

formula inversă fiind

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \hat{f}_c(\xi)\ \cos\ (x\xi) d\xi \quad (2.22')$$

(dacă f este continuă pe porțiuni și absolut integrabilă pe $\mathbb{R}_+$, cu $f(x) = \frac{1}{2}\,[f(x+) + f(x-)]$, dacă x este punct de salt pentru f) iar transformarea Fourier prin sinus va fi

$$F_s[f(x)]\,(\xi) = \hat{f}_s(\xi) = \int_0^{\infty} f(x)\ \sin\ (x\xi)\ dx \quad (2.23)$$

cu formula inversă

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}_s(\xi)\sin(x\xi)\,d\xi. \tag{2.23'}$$

Transformarea Fourier joacă un rol important în rezolvarea unor probleme din teoria ecuațiilor Laplace, a undelor sferice, a ecuației căldurii etc. (în special în cazul ecuațiilor sau sistemelor de ecuații cu derivate parțiale cu coeficienți constanți), de obicei în ipoteza nemărginii domeniilor în care se caută soluția. În particular, este aplicabilă în cazul ecuațiilor cu derivate parțiale de forma

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u = L\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)u + F(t, \mathbf{x}),\ t \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{2.24}$$

în care P și L sînt operatori diferențiali liniari, P fiind de forma

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = a_0\frac{\partial^k}{\partial t^k} + a_1\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} + \ldots + a_{k-1}\frac{\partial}{\partial t} + a_k,\ a_j \in \mathbb{R}, j = 0,1,\ldots,k,$$

iar L de forma

$$L\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) = \sum_{j_1,\ldots,j_n \geqslant 0} a_{j_1\ldots j_n}\frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}},\ j_1 + \ldots + j_n = j \leqslant m,$$

$a_{j_1\ldots j_n} \in \mathbb{R}$; soluția se poate căuta de forma

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} v(t, \xi)\,e^{-i\mathbf{x}\cdot\xi}\,d\xi \tag{2.25}$$

și ecuația (2.24) va fi verificată dacă v verifică egalitatea integrală

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)v(t, \xi) - L(i\xi)\,v(t, \xi)\right]e^{-i\mathbf{x}\cdot\xi}d\xi = F(t, \mathbf{x}).$$

În baza egalității (2.21'), ultima relație arată că $\left[P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - L(i\,\xi)\right]v(t, \xi)$ este transformarea Fourier a factorului perturbator F (în care t este presupus un parametru) și deci, în baza lui (2.21)

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)v(t, \xi) - L(i\xi)v(t, \xi) = \hat{F}(t, \xi)$$

$$\left(= \int_{\mathbb{R}^n} F(t, \mathbf{x})\,e^{i\mathbf{x}\cdot\xi}\,d\mathbf{x}\right). \tag{2.24'}$$

Evident, prin $L(i\xi)$ se înțelege polinomul

$$L(i\xi) = \sum_{j_1,\ldots,j_n \geqslant 0} a_{j_1\ldots j_n}(i\xi_1)^{j_1}\ldots(i\xi_n)^{j_n},\ j_1 + \ldots + j_n = j \leqslant m,$$

iar ultima egalitate poate fi considerată o ecuație diferențială de ordinul k în variabila t, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ fiind parametru. În acest mod se justifică utilizarea transformării Fourier în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale: integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale este redusă la integrarea unor ecuații diferențiale cu parametri; odată determinat v din ecuația (2.24'), prin înlocuire în (2.25), se obține soluția u a ecuației cu derivate parțiale (2.24).

Este evident că, în mod natural, prin această metodă se pot rezolva problemele Cauchy

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}), \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial^{k-1}u(t, \mathbf{x})}{\partial t^{k-1}}\Big|_{t=0} = u_{k-1}(\mathbf{x}) \tag{2.26}$$

pentru ecuația (2.24); deoarece din (2.25) rezultă

$$\frac{\partial^j u(t, \mathbf{x})}{\partial t^j} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^j v(t, \xi)}{\partial t^j}\,e^{-i\mathbf{x}\cdot\xi}d\xi,$$

condițiile inițiale (2.26) se transformă în condițiile inițiale

$$\frac{\partial^j v(t, \xi)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \hat{u}_j(\xi),\ j = 0,1,\ldots,k-1, \tag{2.26'}$$

pentru ecuația diferențială (2.24′). Cum condițiile (2.26′) determină în mod unic soluția v a ecuației diferențiale (2.24′) (vezi cap. 8, vol. I), se deduce posibilitatea obținerii (cel puțin sub formă integrală) soluției problemei Cauchy (2.26) pentru ecuația cu derivate parțiale (2.24); pentru aceasta, este suficient să se înlocuiască v, dedus din condițiile (2.24′) și (2.26′), în (2.25).

În acest mod s-a demonstrat existența soluției formale $u = u(t, \mathbf{x})$ a soluției problemei Cauchy (2.26) pentru ecuația cu derivate parțiale (2.24); pentru ca această soluție u să înceteze a fi formală trebuie realizată sinteza ei [ceea ce înseamnă că trebuie demonstrată existența derivatelor parțiale de ordinul k în raport cu t și de ordinul m în raport cu $\mathbf{x}$, precum și faptul că se verifică condițiile inițiale (2.26)].

Exemple. 8. Să găsim soluția $u = u(t, \mathbf{x})$ a ecuației căldurii din $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_n u, \qquad t \geqslant 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ a \in R,$$

care verifică în plus condiția Cauchy

$$u(t, \mathbf{x})|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Comparînd cu ecuația generală (2.24), se deduce

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad L\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) u = a^2 \Delta_n u = a^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2};$$

căutînd soluția sub forma

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} v(t, \xi)\ e^{-i(x, \xi)} d\xi,$$

conform cu teoria anterioară, v va verifica ecuația diferențială

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a^2 \|\xi\|^2 v, \qquad \|\xi\|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$$

și condiția inițială

$$v(t, \xi)|_{t=0} = \hat{u}_0(\xi).$$

Prin urmare, prin integrare obținem

$$v(t, \xi) = \hat{u}_0(\xi) \exp(-a^2 \|\xi\|^2 t)$$

iar soluția se va scrie

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_0(\xi)\, e^{a^2 |\xi|^2 t - i(x, \xi)}\, d\xi.$$

Deoarece

$$\hat{u}_0(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\mathbf{y})\, e^{i(y, \xi)}\, dy,$$

înlocuind în $u(t, \mathbf{x})$, prin schimbarea ordinii de integrare se găsește

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\mathbf{y}) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2 |\xi|^2 t + i(x - y, \xi)}\, d\xi \right] dy =$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\mathbf{y})\, e^{-\frac{1}{4a^2 t} |y - x|^2}\, dy$$

deoarece

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2 |\xi|^2 t + i(y - x, \xi)}\, d\xi = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \xi_j^2 t + i(y_j - x_j)\xi_j}\, d\xi_j =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}}\, e^{-\frac{(y_j - x_j)^2}{4a^2 t}} = \left(\frac{\pi}{a^2 t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4a^2 t} |y - x|^2}$$

Funcția u astfel găsită va fi soluția formală a problemei Cauchy $u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$ pentru ecuația $u_t = a^2 \Delta_n u$ și se numește *formula lui Poisson* pentru ecuația căldurii; ulterior, în cap. 4 al acestui volum se va efectua sinteza acestei soluții.

9. Să găsim soluția ecuației coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

care verifică datele Cauchy

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

căutînd soluția de forma

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, \xi)\, e^{-ix\xi}\, d\xi,$$

rezultă că v verifică ecuația diferențială

$$v_{tt} + a^2 \xi^2 v = 0$$

și condițiile inițiale

$$v(t, \xi)|_{t=0} = \hat{u}_0(\xi), \quad v_t(t, \xi)|_{t=0} = \hat{u}_1(\xi).$$

Această soluție se scrie

$$v(t, \xi) = \hat{u}_0(\xi) \cos(a\xi t) + \hat{u}_1(\xi) \frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}$$

și deci $u(t, x)$ se scrie

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(\xi) \cos(a\xi t)\, e^{-ix\xi}\, d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_1(\xi) \frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\, e^{-ix\xi}\, d\xi;$$

notînd

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(\xi) \cos(a\,\xi\,t) e^{-ix\xi}\, d\xi,$$

$$u_2(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_1(\xi) \frac{\sin(a\,\xi\,t)}{a\xi} e^{-ix\xi}\, d\xi,$$

găsim

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(\xi) \frac{1}{2} (e^{ia\xi t} + e^{ia\xi t}) e^{-ix\xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \hat{u}_0(\xi) e^{-i\xi(x-at)} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \hat{u}_0(\xi) e^{-i\xi(x+at)}\, d\xi.$$

Comparînd cu (2.20′), se deduce

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2} [u(x - at) + u_0(x + at)].$$

Pentru calculul lui u_2, se poate face observația că

$$\frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_1(\xi) \cos(a\,\xi\,t) e^{-i\xi x}\, d\xi$$

și deci, conform cu calculele anterioare,

$$\frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} [u_1(x - at) + u_1(x + at)];$$

prin integrare în raport cu t_1, rezultă

$$u_2(t, x) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} u_1(x - ay)\, dy + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} u_1(x + ay)\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2a} \int_{t_0}^{x-at} u_1(z)\, dz + \frac{1}{2a} \int_{t_0}^{x+at} u_1(z) dz = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(z)\, dz$$

În definitiv, soluția căutată va fi

$$u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x) = \frac{1}{2} [u_0(x - at) + u_0(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(z)\, dz$$

iar sinteza ei este ușor de realizat : avem $u \in C^2$ dacă $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ iar $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ iar prin verificare directă se deduce că u este soluție a ecuației coardei vibrante și în plus $u(0, x) = u_0(x)$, $u_t(0, x) = u_1(x)$.

10. Dacă în locul ecuației coardei vibrante se consideră ecuația undelor sferice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_n u \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

și condițiile inițiale

$$u(t, \mathbf{x})|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}),\ u_t(t, \mathbf{x})|_{t=0} = u_1(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

calculele din exemplul 9 rămîn în întregime valabile dar cu înlocuirea lui ξ prin $\|\xi\| = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2}$ în funcțiile $\cos(a\xi t)$ și $\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}$; așadar, forma integrală a acestei soluții va fi

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_0(\xi) \cos(a \|\xi\| t) e^{-i(\xi, \mathbf{x})}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_1(\xi) \frac{\sin(a\|\xi\| t)}{a\|\xi\|} e^{-i(\xi, \mathbf{x})}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\mathbf{y}) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \cos(a\|\xi\| t) e^{-(\xi, \mathbf{x}-\mathbf{y})}\, d\xi \right] dy +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\mathbf{y}) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin(a\|\xi\| t)}{a\|\xi\|} e^{-i(\xi, \mathbf{x}-\mathbf{y})}\, d\xi \right] dy$$

dar calculul integralelor interioare este complicat și va fi efectuat mai tîrziu (2.4.4.7).

Din aceste exemple reiese clar modul de utilizare precum și limitele acestei metode : pentru a obține forma explicită a soluției trebuie efectuate calcule complicate în care se utilizează proprietăți ale unor funcții speciale.

Transformarea Fourier poate fi aplicată și în alte moduri pentru rezolvarea unor probleme diferite de problema Cauchy ; în acest sens vom considera două exemplificări.

Exemple. 11. Să găsim soluția ecuației

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

astfel încît

$$u(0,\ x) = 0,\ x > 0, \quad u(t,\ 0) = f(t),\ t > 0,$$

f fiind o funcție derivabilă și nulă pentru $t = 0$; se observă că este vorba de o problemă la limită pentru primul cadran din $\mathbb{R}^2$, datele fiind nule pe semiaxa orizontală și egale cu f pe semiaxa verticală. Dacă $u = u(t, x)$ este soluția căutată, vom introduce funcția v prin

$$v(t,\ \xi) = \int_0^\infty u(t,\ x)\ \sin\ (x\ \xi)\ dx\ ;$$

calculînd $\dfrac{\partial v}{\partial t}$, din datele problemei se deduce

$$\frac{\partial v(t,\ \xi)}{\partial t} = \int_0^\infty \frac{\partial u(t,\ x)}{\partial t} \sin\ (x\xi)\ dx = a^2 \int_0^\infty \frac{\partial^2 u(t,\ x)}{\partial x^2} \sin\ (x\xi)\ dx.$$

Integrînd prin părți, se deduce că v verifică ecuația diferențială

$$\frac{\partial v(t,\ \xi)}{\partial t} + a^2\xi^2 v(t,\ \xi) = a^2 \xi f(t)$$

și deci, deoarece $v(0,\ \xi) = \int_0^\infty u(0,\ x) \sin\ (x\ \xi)\ dx = 0$

$$v(t,\ \xi) = a^2\ e^{-a^2\xi^2 t}\ \xi \int_0^t f(s)\, e^{a^2\xi^2 s}\ ds = a^2 \int_0^t f(s)\, e^{-a^2\xi^2(t-s)}\ ds\ ;$$

deoarece v este transformarea Fourier prin sinus a funcției căutate u, rezultă

$$u(t,\ x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty v(t,\ \xi) \sin\ (x\xi)\ d\xi = \frac{2a^2}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^t f(s)\ e^{-a^2\xi^2(t-s)}\ ds \right] \xi \sin\ (x\xi)\ d\xi =$$

$$= \frac{2a^2}{\pi} \int_0^t f(s) \left[\int_0^\infty \xi e^{-a^2\xi^2(t-s)} \sin\ (x\xi)\ d\xi \right] ds = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{(t-s)^3}}\ e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}}\ ds.$$

12. Să găsim soluția mărginită a ecuației lui Laplace

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0,$$

în care $u = u(t, x, y)$, $t > 0$, verifică și condițiile suplimentare

$$a \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ pentru } \quad y = 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$u(0,\ x,\ 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(0,\ x,\ 0)}{\partial t} = 0,$$

$$u \to 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \to 0, \qquad \text{cînd } |\ x\ | \to \infty.$$

Vom scrie

$$\hat{u}(t,\ \xi,\ y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,\ x,\ y)\ e^{i\xi x} dx,$$

dacă u este soluția căutată (a cărei existență se presupune) ; deoarece

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(t,\ \xi,\ y)}{\partial y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(t,\ x,\ y)}{\partial y^2}\ e^{i\xi x} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(t,\ x,\ y)}{\partial x^2}\ e^{i\xi x}\ dx,$$

după două integrări prin părți se obține ecuația diferențială

$$\frac{\partial^2 u(t,\ \xi,\ y)}{\partial y^2} - \xi^2 \hat{u}(t,\ \xi,\ y) = 0$$

care admite o singură soluție mărginită cînd $y \to -\infty$,

$$\hat{u}(t,\ \xi,\ y) = c(t,\ \xi) e^{|\xi|\, y},$$

c fiind o funcție mărginită, care se determină din condiția $\hat{u}|_{y=0} = c(t,\ \xi)$ și din ecuația $au_y + u_{tt} = 0$. Rezultă

$$c(t,\ \xi) = a(\xi)\ e^{i\sqrt{a|\xi|\ t}} + b(\xi)\ e^{-i\sqrt{a|\xi|\ t}}$$

iar prin utilizarea condițiilor rămase, se deduce

$$a(\xi) = b(\xi) = \frac{1}{2}\ \hat{\varphi}\ (\xi).$$

Prin urmare,

$$\hat{u}(t,\ \xi,\ y) = \hat{\varphi}\ (\xi) \cos(\sqrt{a|\ \xi|\ t})\ e^{|\xi|\, y}$$

iar prin aplicarea transformării Fourier inverse se deduce forma finală a soluției

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\xi) \cos\left(\sqrt{a|\xi|}\right) t \, e^{|\xi| y - i\xi x} \, d\xi.$$

13. *Problema Dirichlet pentru semiplanul* $y > 0$ are următorul enunț : să se găsească $u \in C^2(x \in \mathbb{R},\ y > 0)$, $u \in C^0(x \in \mathbb{R},\ y \geqslant 0)$, știind că pentru $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ se verifică ecuația Laplace

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

iar pentru $y = 0$ avem

$$u(x, y)|_{y=0} = f(x),$$

f fiind o funcție continuă dată ; deoarece domeniul de definiție pentru u este nemărginit, vom presupune $|u(x, y)| \leqslant M < \infty$ cînd $x^2 + y^2 \to \infty$.

Soluția se poate căuta de forma

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi, y) \, e^{-i\xi x} \, d\xi$$

iar v va verifica ecuația diferențială

$$\frac{\partial^2 v(\xi, y)}{\partial y^2} + \xi^2 v(\xi, y) = 0$$

și condiția inițială

$$v(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) :$$

această ecuație diferențială admite ca soluție mărginită pentru $y \to \infty$ funcția

$$v(\xi, y) = \begin{cases} \hat{f}(\xi) \, e^{-\xi y}, & \text{dacă } \xi > 0, \\ \hat{f}(\xi) \, e^{\xi y}, & \text{dacă } \xi < 0, \end{cases}$$

(y este pozitiv prin ipoteză). Pe scurt, $v(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi| y}$ și deci

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \, e^{-|\xi| y} \cdot e^{-i\xi x} \, d\xi =$$

$$= \mathscr{F}^{-1}\left(\mathscr{F}\left[f(x) * \frac{y}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2}\right]\right) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(f(t)\, dt}{(x - t)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + y \operatorname{tg} t) \, dt$$

deoarece (vezi vol. I, pag. 119), transformarea Fourier a funcției $e^{-|x| y}$ este egală cu $\frac{2y}{y^2 + \xi^2}$ (aici y joacă rolul lui a, ξ joacă rolul lui x iar $t - x$ se scrie în locul lui ξ) iar

$$\mathscr{F}\left[f(x) * \frac{y}{\pi} \frac{1}{x^2 + y^2}\right](\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot e^{-|\xi| y}.$$

Dacă se consideră problema Dirichlet analoagă pentru $n > 2$, atunci soluția ecuației $\Delta_n u = 0$ care verifică $u(x_1, \ldots, x_n)|_{x_n = 0} = f(x_1, \ldots, x_n)$ va fi

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{f(t)\, dt}{[(x_1 - t_1)^2 + \ldots + (x_{n-1} - t_{n-1})^2 + x_n^2]^{n/2}}, \quad t = (t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

ω_n fiind aria sferei unitate din $\mathbb{R}^n$, deci $\omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

2.3.2. Transformarea Laplace și integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale

După cum s-a specificat în vol. I, cap. 8, prin **transformarea Laplace** a funcției $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, ($f$ fiind local integrabilă pe $\mathbb{R}_+$) se înțelege integrala improprie cu parametru

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) \, dx = \mathscr{L}[f(x)](p), p \in \mathbb{C};$$

în ipoteza că F este analitică pentru $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$, $p_0 \in \mathbb{C}$ fiind fixat, iar $F(p) \to 0$, cînd $p \to \infty$ atunci are loc formula de inversare Mellin

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} e^{px} F(p) \, dp$$

cu $c \geqslant \operatorname{Re} p_0$.

În cazul mai multor dimensiuni $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, transformarea Laplace se definește prin

$$F(\mathbf{p}) = F(p_1, \ldots, p_n) = \int_0^{\infty} e^{-(\mathbf{p}, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty}}_{n \text{ integrale}} e^{-p_1 x_1 - \ldots - p_n x_n} f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n,$$

formula Mellin corespunzătoare fiind

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(p,\ x)} F(\mathbf{p})\, d\mathbf{p} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \cdots \int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} e^{p_1x_1+\ldots+p_nx_n} F(p_1, \ldots, p_n)\, dp_1 \ldots dp_n,$$

dacă F este analitică pentru Re $p_j >$ Re p_{0j}, $F \to 0$ cînd $|p_j| \to \infty$, $j = 1,2,\ldots,n$ (aici $c_j \geqslant$ Re p_{0j}).

Deoarece între transformările Fourier şi Laplace se pot stabili legături simple, este clar că şi transformarea Laplace poate fi utilizată pentru obţinerea soluţiilor unor ecuaţii cu derivate parţiale convenabile, în ipoteza că aceste soluţii verifică anumite condiţii suplimentare. Vom exemplifica această posibilitate cu ajutorul cîtorva cazuri particulare.

Exemple 14. Rezolvarea primei probleme mixte pentru ecuaţia căldurii revine la găsirea soluţiei $u = u(t, x) \in C^2(t > 0,\ 0 < x < l)$, $u \in C^0(t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l)$ ecuaţiei căldurii

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad x \in]0,\ l[, \qquad t > 0,$$

care verifică şi condiţiile suplimentare

$u(0, x) = u_0(x)$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant l$ (condiţia iniţială)

$u(t, 0+) = \varphi_1(t)$, $u(t, l-) = \varphi_2(t)$, $t > 0$ (condiţiile la capete),

presupunînd verificate condiţiile de racordare : $u_0(0) = \varphi_1(0)$, $u_0(l) = \varphi_2(0)$.

Calculînd transformarea Laplace în raport cu t (deoarece $t \in \mathbb{R}_+$) a soluţiei u, avem

$$U(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t, x)\, dt$$

iar cum

$$\frac{\partial^2 U(p, x)}{\partial x^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial^2 u(t,\ x)}{\partial x^2}\, dt = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial u(t,\ x)}{\partial t}\, dt = p \int_0^\infty e^{-pt} u(t, x)\, dt - u(0+, x),$$

se deduce ecuaţia diferenţială verificată de U

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - pU = -u_0(x);$$

la această ecuaţie se adaugă condiţiile bilocale

$$U(p, 0+) = \int_0^\infty u(t, 0+)\, e^{-pt} dt = \int_0^\infty \varphi_1(t) e^{-pt} dt = \Phi_1(p)$$

$$U(p,\ l-) = \int_0^\infty u(t, l-)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty \varphi_2(t)\, e^{-pt}\, dt = \Phi_2(p).$$

În acest mod s-a redus problema în cauză la găsirea soluţiei unei probleme bilocale pentru o ecuaţie diferenţială ; utilizînd teoria din cap. 4, vol. II, va rezulta $U = U(p, x)$ iar soluţia căutată se va scrie deci sub forma integrală

$$u(t,\ x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} U(p, x)\, e^{pt}\, dp,$$

unde $c \in \mathbb{R}$ este convenabil determinat în domeniul de analiticitate în raport cu variabila p a funcţiei U.

În particular, dacă $u_0 = 0$ iar $l = +\infty$ (deci $\varphi_2 = 0$, presupunînd $u \to 0$ cînd $x^2 + l^2 \to \infty$), se deduce soluţia

$$U(p, x) = \Phi_1(p) e^{-x\sqrt{p}}$$

şi deci (în baza teoremei de convoluţie) avem

$$u(t,\ x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi_1(t - s)\, e^{-\frac{x^2}{4s}} s^{-\frac{3}{2}}\, ds$$

deoarece $\mathcal{L}^{-1}[e^{-x\sqrt{p}}]\,(t) = \dfrac{x}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} t^{-\frac{3}{2}} = \psi(t, x).$

Să presupunem $u_0 = 0$ şi să notăm prin $U_1 = U_1(p, x)$ şi $U_2 = U_2(p, x)$ soluţiile ecuaţiei $U_{xx} - pU = 0$ care verifică condiţiile bilocale

$$U_1(p, 0) = 1 \qquad U_1(p, l) = 0,$$

$$U_2(p, 0) = 0, \qquad U_2(p, l) = 1;$$

atunci scriind

$$U(p, x) = U_1(p, x)\, \Phi_1(p) + U_2(p, x)\, \Phi_2(p)$$

avem $U(p, 0) = \Phi_1(p)$, $U(p, l) = \Phi_2(p)$ şi deci

$$u^*(t, x) = u_1(t, x) * \varphi_1(l) + u_2(t, x) * \varphi_2(l)$$

(convoluția referindu-se la variabila t), unde

$$U_1 = \mathcal{L}[u_1], \qquad U_2 = \mathcal{L}[u_2],$$

transformarea Laplace fiind calculată în raport cu variabila t.

Este ușor de verificat că

$$U_1(p, x) = \frac{\operatorname{sh}[(l-x)\sqrt{p}]}{\operatorname{sh}(l\sqrt{p})}; \quad U_1(p, x) = \frac{\operatorname{sh}(x\sqrt{p})}{\operatorname{sh}(l\sqrt{p})}$$

și deoarece

$$U_1(p, x) = \frac{\operatorname{sh}[(l-x)\sqrt{p}]}{\operatorname{sh}(l\sqrt{p})} = \frac{e^{-x\sqrt{p}} - e^{-(2l-x)\sqrt{p}}}{1 - e^{-2l\sqrt{p}}} =$$

$$= \left[e^{-x\sqrt{p}} - e^{-(2l-x)\sqrt{p}}\right]\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nl\sqrt{s}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+lx)\sqrt{p}} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} e^{-[2(n+1)l-x]\sqrt{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2nl+x)\sqrt{p}} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2nl-x)\sqrt{p}},$$

rezultă

$$u_1(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(t, 2nl + x) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi(t, 2nl - x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(t, 2nl + x)$$

cu ψ definit anterior; analog se deduce

$$u_2(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(t, 2nl + l - x).$$

Așadar, în ipoteza că temperatura inițială este nulă, soluția căutată se scrie

$$u^*(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^t \psi(t - s, 2n\,l + x)\, \varphi_1(s)\, ds + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^t \psi(t - s, 2nl + l - x)\ \varphi_2(s) ds;$$

dacă însă $u \neq 0$, soluția va fi formată din suma soluțiilor particulare corespunzătoare lui $u_0 \neq 0$ și $u_0 = 0$.

15. Să aplicăm transformarea Laplace bidimensională

$$U(p, q) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-px-qy} u(x, y)\, dx\, dy$$

la integrarea ecuației Laplace $\Delta_2 u = 0$; în acest caz, sînt necesare cunoașterea următoarelor condiții suplimentare:

$$u(x, 0) = a_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = a_2(x),$$

$$u(0, y) = b_1(y), \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = b_2(y).$$

Aplicînd regulile calculului operațional, se deduce ecuația algebrică

$$p^2 U(p, q) - pB_1(q) - B_2(q) + q^2 U(U(p, q) - qA_1(p) - A_2(p) = 0,$$

a cărei soluție va fi

$$U(p, q) = \frac{qA_1(p) + A_2(p) + p\,B_1(q) + B_2(q)}{p^2 + q^2}$$

Presupunînd existența soluției u căutate, deoarece numitorul lui U se anulează pentru $p = iq$ și $p = -iq$, va trebui ca și numărătorul să se anuleze pentru aceste valori (altfel U nu ar fi analitică pentru Re $p >$ Re p_0, Re $q >$ Re q_0), adică neapărat

$$qA_1(iq) + A_2(iq) + iqB_1(q) + B_2(q) = 0,$$

$$qA_1(-iq) + A_2(-iq) - iqB_1(q) + B_2(q) = 0.$$

Aceste două condiții arată că datele suplimentare a_1, a_2, b_1 și b_2 nu pot fi date arbitrar dîndu-se, de exemplu, a_1 și b_1, pentru a_2 și b_2 se obțin funcții care se exprimă cu ajutorul lui a_1 și b_1; astfel dacă se dau a_1 și b_1, avem o problemă Dirichlet, dîndu-se a_2 și b_2, avem o problemă Neumann iar dacă se dau a_1 și b_2 (sau a_2 și b_1), este cazul celei de-a treia probleme la limită pentru ecuația Laplace. Soluția căutată va fi

$$u(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{px+qy} U(p, q)\, dp\, dq.$$

2.3.3. Alte transformări integrale (Hankel, Macdonald, Mehler, Mellin) și utilizarea lor în integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale

După cum s-a constatat în punctele anterioare, utilizînd transformarea Fourier sau transformarea Laplace și proprietățile acestora, se pot rezolva anumite probleme din teoria ecuațiilor cu derivate parțiale prin reducerea acestora la probleme mai simple (rezolvări de ecuații algebrice, integrarea unor ecuații diferențiale); soluția căutată este, de regulă, exprimată prin integrale cu parametru.

Transformările integrale se pot scrie sub forma

$$T(f)(\xi) = \int_a^\infty k(x, \xi)\, f(x)\, \mathrm{d}x, \quad b \leqslant \xi < \infty, \tag{2.27}$$

unde f este funcția asupra căreia se aplică transformarea, obținîndu-se transformarea ei $T(f)$, k fiind nucleul transformării; uneori este posibilă rezolvarea ecuației integrale (2.27) [în ipoteza că $T(f)$ este cunoscut iar f necunoscut], soluția scriindu-se sub forma

$$f(x) = \int_b^\infty k^{-1}(x, \xi)\, (Tf)\, (\xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad a \leqslant x < \infty. \tag{2.27'}$$

În acest caz, se poate scrie

$$f(x) = T^{-1}(g)\, (x), \quad g = T(f),$$

T^{-1} fiind transformarea inversă relativă la transformarea (2.27). Astfel, dacă $a = b = -\infty$, $k(x, \xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}$, se obține *transformarea Fourier* utilizată în 2.3.1, cînd $k^{-1}(x, \xi) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}$; dacă $a = b = 0$ iar $k(x, y) = \cos(x\,\xi)$ [$= \sin(x\xi)$] se obține *transformarea Fourier prin cosinus* (*sinus*) iar $k^{-1}(x, \xi) = \frac{2}{\pi}\cos(x\,\xi)$ $\left[= \frac{2}{\pi}\sin(x\,\xi)\right]$.

Dacă însă $k(x, \xi) = x\,J_\nu(x\,\xi)$, $a = b = 0$, J_ν fiind funcția Bessel de speța I (vezi vol. I, cap. 13) cu $\nu > -\frac{1}{2}$, transformarea (2.27) se numește *transformare Hankel* cînd $k^{-1}(x, \xi) = \xi\, J_\nu(x\,\xi)$ iar dacă $k(x, \xi) = K_{\mathrm{i}\xi}(x)$ sau $k(x, \xi) = x^{-1/2}K_{\mathrm{i}\xi}(x)$, $a = b = 0$, K_ν fiind funcția lui Macdonald, se obține *transformarea lui Macdonald* iar $k^{-1}(x, \xi) = \frac{2\xi\ \mathrm{sh}\ (\pi\xi)}{\pi^2 x}K_{\mathrm{i}\xi}(x)$, respectiv $k^{-1}(x, \xi) = \frac{2\xi\ \mathrm{sh}\ (\eta\xi)}{\pi^2\sqrt{x}}K_{\mathrm{i}\xi}(x)$.

În fine, dacă se presupune $a=1$, $b=0$, $k(x, \xi) = P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi}(x)$, P_ν fiind funcția Legendre [adică una din soluțiile ecuației diferențiale

$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0$, care pentru $\nu \in \mathbb{N}$ coincide cu polinomul Legendre de grad n, $P_n(x) = {}_2F_1\left(-\nu,\ \nu + 1;\ 1;\ \frac{1 - x}{2}\right)$], se obține *transformarea lui Mehler* iar

$$k^{-1}(x, \xi) = \xi\ \mathrm{th}\ (\pi\xi)\, P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\xi}(x).$$

Dacă în (2.27) $\xi \in \mathbb{C}$, vom nota $\xi = p$ și vom presupune că p parcurge domeniul $D \subset \mathbb{C}$; dacă avem $a = 0$, D un semiplan de forma $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,p_0$ iar $k(x, p) = \mathrm{e}^{-px}$, se obține transformarea Laplace, iar dacă $a = 0$, D este banda infinită $\mathrm{Re}\ p_1 < \mathrm{Re}\,p < \mathrm{Re}\ p_2$ și $k(x, p) = x^{p-1}$, se obține *transformarea lui Mellin*; în aceste cazuri, transformarea inversă se scrie cu ajutorul unei formule de tipul

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma k^{-1}(x, p)\, g(p)\mathrm{d}p,$$

$g(p) = \int_0^\infty k(x, p)\, f(x)\mathrm{d}x$, unde $k^{-1}(x, p) = \mathrm{e}^{px}$, în cazul transformării Laplace, $k^{-1}(x, p) = x^{-p}$ în cazul transformării Mellin, γ fiind o dreaptă paralelă cu axa imaginară din planul complex situată în D.

Dintre transformările prezentate, în afara transformării Fourier și transformării Laplace sînt utilizate în practică transformările Hankel și Mellin pe care le vom prezenta și exemplifica pe scurt.

Astfel, dacă $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ este continuă pe porțiuni, standardizată și are variație mărginită pe orice interval de forma $]0, b[$, $b > 0$, iar integrala improprie $\int_0^\infty \sqrt{x}\ |f(x)|\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci are loc formula integrală Fourier-Bessel (sau Hankel)

$$f(x) = \int_0^\infty \xi J_\nu(\xi\, x)\left[\int_0^\infty f(y)\ yJ_\nu(\xi\, y)\, \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \tag{2.28}$$

din care, dacă definim transformarea Hankel $H(f)$ a funcției f prin

$$H(f)\, (\xi) = \int_0^\infty y\, f(y)\, J_\nu(\xi y)\, \mathrm{d}y, \quad 0 < \xi < \infty,$$

se deduce formula de inversare

$$f(x) = \int_0^\infty \xi H(f)\,(\xi)\, J_\nu(\xi x)\, \mathrm{d}\xi.$$

Identitatea (2.28) a fost generalizată de către Weber sub forma

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{g_3(x)\xi}{J_\nu^2(\xi a) + N_\nu^2(\xi a)} \left[\int_a^\infty f(y)\, g_\xi(y)\, y\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}\xi,$$

$$0 < a < x < \infty, \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

N_ν fiind funcția Bessel de speța II iar $g_\xi(x) = J_\nu(a\ \xi)\ N_\nu(\xi x) - N_\nu(\xi a)\, J_\nu(\xi x)$, din care, pentru $a \to 0$ se obține (2.28).

Exemplul 16. Să se găsească soluția ecuației

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 \leqslant x < \infty,\quad t \geqslant 0,$$

care verifică la momentul inițial $t = 0$, condiția $u(0, x) = u_0(x)$, este finită pentru $x = 0$ și este mărginită pentru $x = \infty$.

Soluția se poate căuta sub forma

$$u(t,\ x) = \int_0^\infty v(t,\ \xi)\ J_0(\xi x)\, \mathrm{d}\xi\,;$$

deoarece funcția $J_0(\xi x)$ verifică ecuația diferențială

$$x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \xi^2 xy = 0,$$

care se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = -\xi^2 y, \qquad x > 0,$$

funcția u definită mai sus va verifica ecuația dată dacă v este soluție a ecuației diferențiale

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \xi^2 v = 0.$$

Deci $v(t, \xi) = a(\xi)\, \mathrm{e}^{-\xi^2 t}$, a fiind deocamndată o funcție arbitrară. Se găsește

$$u(t,\ x) = \int_0^\infty a(\xi)\, \mathrm{e}^{-\xi^2 t} J_0(\xi\, x)\, \mathrm{d}\xi$$

iar condiția inițială se scrie

$$u_0(x) = \int_0^\infty a(\xi)\ J_0(\xi\, x)\, \mathrm{d}\xi,$$

ceea ce înseamnă că funcția $a(\xi)/\xi$ este transformarea Hankel a funcției u_0, deci

$$a(\xi) = \xi \int_0^\infty y u_0(y)\ J_0(\xi\, y)\, \mathrm{d}y.$$

Așadar, avem

$$u(t,\ x) = \int_0^\infty \left[\xi \int_0^\infty y\, u_0(y)\ J_0(\xi\, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{e}^{-\xi^2 t} J_0(\xi\, x)\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_0^\infty y u_0(y) \left[\int_0^\infty \xi \mathrm{e}^{-\xi^2 t} J_0(\xi\, y)\ J_0(\xi\, x)\ \mathrm{d}\xi \right] \mathrm{d}y$$

și deoarece are loc egalitatea

$$\int_0^\infty \xi \mathrm{e}^{-\xi^2 t} J_0(\xi\, y)\ J_0(\xi\, x)\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2t}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}\, I_0\left(\frac{xy}{2t}\right),$$

I_0 fiind funcție Bessel de argument imaginar, avem în definitiv soluția căutată

$$u(t,\ x) = \frac{1}{2t}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}\, I_0\left(\frac{xy}{2t}\right) y\, u_0(y)\, \mathrm{d}y.$$

Din punct de vedere fizic, acest exemplu corespunde unui proces de difuzie în $\mathbb{R}^3$ în ipoteza că datele inițiale $u(t, x, y, z)|_{t=0} = u_0$ au simetrie axială [deci $u_0 = u_0(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$].

Trecînd la transformarea Mellin $\mathcal{M}[f(x)]\ (p)$, unde

$$\mathcal{M}[f(x)](p) = \int_0^\infty x^{p-1} f(x)\, \mathrm{d}x,$$

f fiind de asemenea continuă pe porțiuni, standardizată, cu variație mărginită în orice interval de forma $[0, b]$ și astfel încît integralele

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}|f(x)|\,\mathrm{d}x, \int_1^\infty x^{\beta-1}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

să fie convergente, atunci $\mathcal{M}[f(x)](p)$ va fi o funcție analitică în banda infinită $\alpha < \mathrm{Re}\ p < \beta$ din planul complex $p = s + it$. În aceste condiții, se poate scrie și transformarea inversă

$$f(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} g(p)\, x^{-p}\mathrm{d}p$$

cu $g = \mathcal{M}[f(x)]$.

Se poate constata ușor că transformarea Mellin este strîns legată de transformarea Fourier scrisă sub forma

$$F(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\zeta}\mathrm{d}t,$$

presupunînd $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$, $\eta \neq 0$, $\alpha < \mathrm{Im}\zeta = \eta < \beta$, cînd formula inversă se scrie

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{i}c-\infty}^{\mathrm{i}c+\infty} F(\zeta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta t}\mathrm{d}\zeta, \quad \alpha < c < \beta;$$

cu schimbarea de variabile

$$\mathrm{i}\zeta = p,\ x = \mathrm{e}^t,\ g(x) = f(\ln x),\ G(p) = F(-\mathrm{i}p)$$

se obține

$$G(p) = \int_0^\infty x^{p-1} g(x)\, \mathrm{d}x, \quad \alpha < \mathrm{Re}\, p < \beta,$$

și deci

$$g(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} x^{-p}\, G(p)\,\mathrm{d}p.$$

Se verifică ușor următoarele proprietăți ale acestei transformări:

$$\mathcal{M}[f'(x)](p) = -(p-1)\,\mathcal{M}[f(x)](p-1), \alpha < \mathrm{Re}\,(p-1) < \beta$$

(în ipoteza că $\lim_{x \downarrow \infty} x^p f(x) = 0$, $\mathrm{Re}\ p > \alpha$, $\lim_{x \uparrow \infty} x^p f(x) = 0$, $\mathrm{Re}\ p < \beta$),

$$\mathcal{M}[x^q f(x)](p) = \mathcal{M}[f(x)](p+q).$$

Dacă

$$h(x) = \int_0^\infty y^q f(x\cdot y) g(y)\,\mathrm{d}y,\ k(x) = \int_0^\infty y^q f\left(\frac{x}{y}\right) g(y)\,\mathrm{d}y,$$

atunci au loc egalitățile

$$\mathcal{M}[h(x)](p) = \mathcal{M}[f(x)](p)\,\mathcal{M}[g(x)](q-p+1),$$

$$\mathcal{M}[k(x)](p) = \mathcal{M}[f(x)](p)\,\mathcal{M}[g(x)](q+p+1),$$

care pot fi considerate ca fiind analogul relațiilor de convoluție de la transformarea Fourier sau Laplace în cazul transformării Mellin; de asemenea

$$\mathcal{M}[(f*g)(x)](p) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathcal{M}[f(x)](q)\,\mathcal{M}[g(x)](p-q)\,\mathrm{d}q$$

Transformarea Mellin este convenabilă în rezolvarea unor probleme legate de integrarea ecuației Laplace $\Delta_2 u = 0$ scrisă în coordonate polare; cum

$$\Delta_2 u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2},$$

se obține egalitatea

$$\mathcal{M}[\Delta_2 u(r, \theta)](p) = \left[\frac{d^2}{d\theta^2} + (p-2)^2\right] \mathcal{M}[u(r, \theta)](p-2)$$

(transformarea Mellin referindu-se la variabila r).

Exemplul 17. Să găsim distribuția staționară a temperaturii în sectorul plan $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha < \pi$ în ipoteza că latura $\theta = 0$ este supusă la temperatura nulă iar temperatura laturii $\theta = \alpha$ este egală cu u_0, unde

$$u_0 = \begin{cases} T_0, \text{ dacă } 0 \leqslant r \leqslant a, \\ 0, \text{ dacă } r > a \end{cases}$$

Va trebui integrată ecuația Laplace

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

în ipoteze convenabile asupra lui u astfel încît să se poată aplica teoria transformării Mellin (este suficient să se presupună u și $r \dfrac{\partial u}{\partial r}$ uniform mărginite pentru $r \downarrow 0$ iar $|u(r, \theta)| \leqslant Mr^{-s}$, $s > 0$ cînd $r \to \infty$). Comparînd expresia lui $\Delta_2 u$ cu transformarea Mellin corespunzătoare, se observă că ecuațiile care ne interesează diferă între ele prin transformarea lui $p - 2$ în p; deci scriind

$$U(p, \theta) = \int_0^\infty r^{p-1} u(r, \theta)\, dr$$

rezultă că U va verifica ecuația diferențială

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} + p^2 U = 0$$

în condițiile bilocale

$$U(p, \theta)|_{\theta=0} = \int_0^\infty r^{p-1} u(r, 0)\, dr = 0,$$

$$U(p, \theta)|_{\theta=\alpha} = \int_0^\infty r^{p-1} u(r, \alpha)\, dr = \int_0^\infty r^{p-1} u_0 dr = T_0 \int_0^a r^{p-1} dr = T_0 \frac{a^p}{p}.$$

Vom avea deci

$$U(p, \theta) = T_0 \frac{a^p}{p} \frac{\sin p\theta}{\sin p\alpha}$$

iar soluția se scrie

$$u(r, \theta) = \frac{T_0}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sin p\theta}{\sin p\alpha} \left(\frac{a}{r}\right)^p \frac{dp}{p}$$

cu $0 < c < \pi/\alpha$; ultima integrală se poate calcula cu ajutorul teoriei reziduurilor, obținîndu-se

$$\frac{1}{T_0} u(r, \theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{\alpha} + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}, & \text{dacă } 0 < r < a, \\ \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}, & \text{dacă } r > a. \end{cases}$$

Deoarece are loc egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n \sin nx = \operatorname{arctg} \frac{t \sin x}{1 + t \cos x}, \quad |t| < 1,$$

se obține forma finală a soluției căutate

$$u(r, \theta) = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}}{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha}} \right]$$

2.4. Teoria distribuțiilor și integrarea ecuațiilor liniare cu derivate parțiale cu coeficienți constanți

2.4.1. Distribuții: definiții, proprietăți

Vom nota prin $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ spațiul funcțiilor test φ (adică φ este funcție indefinit derivabilă în $\mathbb{R}^n$ avînd suportul compact în $\mathbb{R}^n$, deci închiderea mulțimii $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}$ este mărginită), în care s-a definit convergența șirurilor $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ din $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ către $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (în scris, $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$) în modul următor: $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ dacă:

a) există un domeniu fix $D_n \subset \mathbb{R}^n$ avînd proprietatea supp $\varphi_j \subset D_n$ (supp φ fiind suportul funcției φ);

b) şirul derivatelor de orice ordin $\left(\frac{\partial^k \varphi_j}{\partial x^k}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, $\frac{\partial^k}{\partial x^k} = \frac{\partial^{k_1+\ldots k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$, converge uniform către $\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}$ (nu se pretinde continuitatea uniformă a convergenţei în cauză şi în raport cu multiindicele k). Mulţimea $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ este suficient de bogată în elemente. Astfel, deoarece funcţia

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, \text{ dacă } t > 0, \\ 0, \quad \text{dacă } t \leqslant 0, \end{cases}$$

este un element din $C^\infty(\mathbb{R})$ cu supp f $= \mathbb{R}_+$, funcţia $g(t) = f(t-a)$ va fi de asemenea un element din $C^\infty(\mathbb{R})$ dar supp $g = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geqslant a\}$ şi atunci notînd $\varphi(x) = f(x-a)\cdot f(b-x)$, $a < b$, avem $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ iar supp $\varphi = [a, b]$; prin urmare, funcţia

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1 - a_1)f(b_1 - x_1)\ldots f(x_n - a_n)f(b_n - x_n)$$

cu $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$ va fi un element din $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ cu supp $\varphi = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

De asemenea, funcţia

$$j(\mathbf{x}; a) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{a^2}{a^2 - \|\mathbf{x}\|^2}\right) & \text{pentru } \|\mathbf{x}\| < a, \\ 0 & \text{pentru } \|\mathbf{x}\| \geqslant a, \end{cases} \tag{2.29}$$

$a > 0$ va fi o funcţie test cu supp $j(\mathbf{x}; a) = B_a[0] = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| \leqslant a\}$ iar dacă ψ este analitică în $\mathbb{R}^n$, atunci $\psi j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Un exemplu de şir din $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ convergent [în sensul convergentei din $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$] către zero este şirul $(\varphi_k(\mathbf{x}))_{k\in\mathbb{N}}$ în care $\varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} j(\mathbf{x}; a)$, funcţia j fiind definită prin (2.29); această convergenţă se justifică imediat dacă se ţine seama de mărginirea tuturor derivatelor $\frac{\partial^m \varphi_k}{\partial x^m}$ în raport cu $\mathbf{x}$ şi m.

Spaţiul $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, pe care vom conveni să-l denumim *spaţiul lui Schwartz* este un spaţiu vectorial, deoarece dacă $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$, $\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} \psi$ atunci

$$(\varphi_j + \psi_j) \xrightarrow{\mathscr{D}} (\varphi + \psi), \quad (a\varphi_j) \xrightarrow{\mathscr{D}} a\varphi, \quad a \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

Vom nota prin $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ spaţiul dual spaţiului $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, adică elementele lui $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ sînt funcţionale liniare şi continue definite pe $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ iar aceste elemente le vom numi *distribuţii* (în sensul lui L. Schwartz); cu alte cuvinte dacă $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, atunci $T(\varphi)$ are sens pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ şi este un număr real (complex) iar

$$T(\varphi + \psi) = T(\varphi) + T(\psi) \tag{2.30}$$

pentru orice $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$T(a\varphi) = aT(\varphi) \tag{2.30'}$$

pentru orice $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ şi orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ [(2.30) şi (2.30') definesc proprietatea de liniaritate a funcţionalei T] şi

$$T(\varphi_j) \to T(\varphi) \text{ dacă } \varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi \tag{2.30''}$$

[(2.30'') defineşte proprietatea de continuitate a funcţionalei T].

Vom conveni să notăm numărul $T(\varphi)$ şi prin

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$$

aşa că relaţiile (2.30) — (2.30'') se transcriu

$$\langle T, \varphi + \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle,$$

$$\langle T, a\varphi \rangle = a\langle T, \varphi \rangle, \quad \langle T, \varphi_j \rangle \to \langle T, \varphi \rangle;$$

evident, convergenţa $T(\varphi_j) \to T(\varphi)$ se înţelege ca o convergenţă de numere reale sau complexe: dacă $z_j = T(\varphi_j) = \langle T, \varphi_j \rangle$, $z = T(\varphi) = \langle T, \varphi_j \rangle$, atunci $z_j \to z$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$, se găseşte $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încît

$$|z_j - z| = |T(\varphi_j) - T(\varphi)| = |T(\varphi_j - \varphi)| < \varepsilon$$

pentru orice $j \geqslant N$.

Orice funcţie f local integrabilă în $\mathbb{R}^n$ generează o distribuţie T_f dacă punem, prin definiţie,

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}; \tag{2.32}$$

se verifică ușor că T_f este o funcțională liniară și continuă pe $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$: dacă $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, atunci

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d} = \int_{\operatorname{supp}\varphi} f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \in \mathbb{R},$$

$$T_f(\varphi+\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,[\varphi(\mathbf{x})+\psi(\mathbf{x})]\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = T_f(\varphi) + T_f(\psi),$$

$$T_f(\varphi_j) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,\varphi_j(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{D_n} f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \to \int_{D_n} f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = T_f(\varphi),$$

unde D_n este domeniul care conține mulțimile supp φ_j, supp φ, $j = 1,2,\ldots$, iar $\int_{D_n} f(\mathbf{x})\,\varphi_j(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ converge către $\int_{D_n} f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ cînd $j \to \infty$, în baza convergenței uniforme a șirului (φ_j) către φ.

Distribuțiile de forma (2.32) se numesc *distribuții regulate* iar toate celelalte distribuții [deci care nu se pot pune sub forma (2.32)] se numesc *distribuții singulare*; existența distribuțiilor singulare justifică introducerea noțiunii de distribuție iar cea mai importantă distribuție singulară este distribuția lui Dirac $\delta(\mathbf{x})$ definită prin

$$\delta(\varphi) = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0). \tag{2.33}$$

Evident $\varphi(0) \in \mathbb{R}$ iar

$$\delta(\varphi+\psi) = (\varphi+\psi)(0) = \varphi(0) + \psi(0) = \delta(\varphi) + \delta(\psi),$$

$$\delta(a\,\varphi) = (a\,\varphi)(0) = a\,\varphi(0) = a\,\delta(\varphi),$$

$$\delta(\varphi_j) = \varphi_j(0) \underset{j\to\infty}{\to} \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

Așadar, s-a verificat faptul că $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ [aici $\varphi(0)$ înseamnă $\varphi(0,\ldots,0)$] și să arătăm că δ nu este o distribuție regulată; dacă δ ar fi o distribuție regulată, atunci ar avea loc egalitatea

$$\delta(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

pentru orice funcție test φ, g fiind local integrabilă în $\mathbb{R}^n$. Deci, va avea loc egalitatea

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \varphi(0)$$

care rămîne valabilă pentru orice funcție text φ; scriind $\varphi = x_j\psi$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, se deduce

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) x_j \psi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

pentru orice $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ceea ce, conform cu una din lemele fundamentale ale calculului variațiilor înseamnă $g(x)\,x_j = 0$ (aproape peste tot). Deci $g(\mathbf{x}) = 0$, aproape peste tot, adică $\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$, adică $\varphi(0) = 0$ pentru orice funcție test φ, ceea ce evident nu se poate; cu alte cuvinte, nu există o funcție $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, astfel încît

$$\delta(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

și deci δ este o distribuție singulară.

O altă distribuție singulară este distribuția lui Dirac translatată $\delta_{\mathbf{a}}$ definită prin

$$\delta_{\mathbf{a}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \tag{2.33'}$$

Dacă f, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, vom spune că $f = g$ dacă și numai dacă $\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$ pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Pentru distribuții (regulate sau singulare) se pot defini cîteva operații simple; astfel, suma distribuțiilor f și g este o nouă distribuție $(f+g)$ definită prin

$$(f+g)(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

(se verifică ușor că $(f+g) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$) iar produsul af, $a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ se definește prin

$$(af)(\varphi) = a \cdot f(\varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

În acest mod, se deduce că $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ este un spațiu vectorial.

Dacă $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ are sens produsul αf, $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ iar $(\alpha f) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, dacă, prin definiție,

$$(\alpha f)(\varphi) = f(\alpha\varphi); \tag{2.34}$$

această definiție este corectă deoarece $\alpha\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ iar dacă $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$, atunci $\alpha\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} \alpha\varphi$; aceste funcții α, cu proprietatea $\alpha\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dacă φ este o funcție test, se numesc *multiplicatori* în $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Dacă $\alpha \notin C^\infty(\mathbb{R}^n)$, este posibil ca produsul să nu definească o distribuție; de asemenea, nu are sens produsul a două distribuții (dacă dorim ca acest produs să fie o operație continuă și să se reducă la produsul obișnuit al funcțiilor în cazul distribuțiilor regulate.)

Importanța practică a distribuțiilor se datorește faptului că orice element $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ admite derivate parțiale de orice ordin, aceste derivate fiind de asemenea distribuții; prin definiție,

$$\left(\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right)(\varphi) = (-1)^{k_1+\ldots+k_n} f\left(\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}\varphi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right)$$

sau

$$\left(\frac{\partial^k f}{\partial \mathbf{x}^k}\right)(\varphi) = (-1)^{|k|} f\left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial \mathbf{x}^k}\right) \tag{2.35}$$

și se verifică ușor că deoarece $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ și $\dfrac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial \mathbf{x}^k}(\varphi + \psi) = (-1)^{|k|} f\left(\frac{\partial^k}{\partial \mathbf{x}^k}[\varphi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x})]\right) =$$

$$= (-1)^{|k|} f\left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial \mathbf{x}^k} + \frac{\partial^k \psi}{\partial \mathbf{x}^k}\right) = (-1)^{|k|} f\left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial \mathbf{x}^k}\right) + (-1)^{|k|} f\left(\frac{\partial^k \psi}{\partial \mathbf{x}^k}\right) =$$

$$= \frac{\partial^k f}{\partial \mathbf{x}^k}(\varphi) + \frac{\partial^k f}{\partial \mathbf{x}^k}(\psi),$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial \mathbf{x}^k}(a\varphi) = (-1)^{|k|} f\left(\frac{\partial^k}{\partial \mathbf{x}^k}[a\varphi]\right) = (-1)^k f\left(a\frac{\partial^k \varphi}{\partial \mathbf{x}^k}\right) =$$

$$= a(-1)^{|k|} f\left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}\right) = a\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\varphi),$$

$$\frac{f^k \partial}{\partial \mathbf{x}^k}(\varphi_j) = (-1)^k f\left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial \mathbf{x}^k}\right) \to (-1)^{|k|} f\left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial \mathbf{x}^k}\right) = \frac{\partial^k f}{\partial \mathbf{x}^k}(\varphi), \text{ dacă } \varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi.$$

Justificarea definiției (2.35) pentru derivatele parțiale ale unei distribuții se realizează ușor, arătînd că aceasta se verifică pentru funcții de clasă $C^{|k|}(\mathbb{R}^n)$; vom presupune $|k| = 1$ și atunci lui $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ îi va corespunde distribuția regulată $T_{f_j'}$ definită prin

$$T_{f_j'}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x};$$

Utilizînd calcule evidente, vom putea scrie

$$T_{f_j'}(\varphi) = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{x} -$$

$$- \int_{\operatorname{supp}\varphi} f\frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_{\operatorname{supp}\varphi} f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

deoarece (în baza formulei flux-divergență)

$$\int_{\operatorname{supp}\varphi} \frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\operatorname{supp}\varphi} f\varphi\nu_j\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

(pentru că produsul $f\varphi$ este nul pe frontiera suportului lui φ); așadar, avem

$$Tf_j'(\varphi) = -\int_{\operatorname{supp}\varphi} f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -T_f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right),$$

ceea ce coincide cu (2.45) în cazul particular $|k| = 1$.

În spațiul distribuțiilor $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ se poate introduce operația de trecere la limită astfel: vom spune că șirul $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ converge către distribuția f, dacă pentru orice funcție test φ avem

$$\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle \text{ sau } f_k(\varphi) \to f(\varphi)$$

(convergență de numere).

Cu această definiție se verifică imediat că dacă șirul de distribuții $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge către distribuția f, atunci șirul derivatelor parțiale $\left(\frac{\partial^m f_k}{\partial \mathbf{x}^m}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge către distribuția $\frac{\partial^m f}{\partial \mathbf{x}^m}$ (cu alte cuvinte, orice șir convergent de distribuții poate fi derivat termen cu termen ori de cîte ori dorim); într-adevăr, deoarece

$$\frac{\partial^m f_k}{\partial \mathbf{x}^m}(\varphi) = (-1)^{|m|} f_k\left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial \mathbf{x}^m}\right)$$

pentru $k \to \infty$, rezultă

$$f_k\left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial \mathbf{x}^m}\right) \to f\left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial \mathbf{x}^m}\right),$$

ceea ce înseamnă că

$$\frac{\partial^m f_k}{\partial \mathbf{x}^m}(\varphi) \to (-1)^{|m|} f\left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial \mathbf{x}^m}\right) = \frac{\partial^m f}{\partial \mathbf{x}^m}(\varphi),$$

adică $\frac{\partial^m f_k}{\partial \mathbf{x}^m} \to \frac{\partial^m f}{\partial \mathbf{x}^m}$.

Exemple: 1. Dacă $n = 1$ și H este funcția unitate (sau funcția lui Heaviside), distribuția corespunzătoare va fi

$$T_H(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

deoarece $H(x) = 0$, pentru $x < 0$, $H(x) = 1$, $x \geqslant 0$. Notînd tot cu H această distribuție (deci $T_H = H$), H va admite derivate de orice ordin; vom avea

$$H'(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0)$$

(deoarece $\varphi(\infty) = 0$, fiind funcție test) și cum $\varphi(0) = \delta(\varphi)$ [vezi (2.33)] se deduce egalitatea $H'(\varphi) = \delta(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, deci

$$H' = \delta. \tag{2.36}$$

Deci derivata funcției unitate din $\mathbb{R}$ este egală (în sensul teoriei distribuțiilor) cu distribuția lui Dirac. Calculînd $H^{(k)}$, găsim

$$H^{(k)}(\varphi) = (-1)^{k-1} H'(\varphi^{(k-1)}) = (-1)^{k-1}\delta(\varphi^{(k-1)}) = (-1)^{k-1}\varphi^{(k-1)}(0) =$$

$$= (-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(\varphi).$$

2. Dacă H este funcția unitate din $\mathbb{R}^n$, adică $H(\mathbf{x}) = 1$ dacă $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$ și $H(\mathbf{x}) = 0$ dacă cel puțin una din variabilele $x_1, \ldots, x_n$ este negativă, distribuția corespunzătoare va fi

$$H(\varphi) = \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n;$$

calculînd $\frac{\partial^n H}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$, găsim

$$\frac{\partial^n H}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}(\varphi) = (-1)^n H\left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\right) = (-1)^n \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} \frac{\partial^n (x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \varphi(0, \ldots, 0) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

și deci în $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial^n H}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = \delta.$$

3. Fie $n = 1$ și f o funcție de clasă $C^1(\mathbb{R})$ pe porțiuni, avînd salturile egale cu $h_1, h_2 \ldots$ în punctele $x_1 < x_2 < \ldots$; deoarece f este local integrabilă, f poate fi considerată o distribuție (regulată), deci va admite derivate (distribuții) de orice ordin. Să notăm prin $\{f'\}$ distribuția care corespunde derivatei lui f (f' există în intervalele $]-\infty, x_1[\,[\,]x_1, x_2[\ldots$ și este local integrabilă în $\mathbb{R}$) și prin f' derivata în sensul teoriei distribuțiilor a acestei funcții; deoarece $f'(\varphi) = -f(\varphi')$, se deduce

$$f'(\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\varphi'(x)\,dx - \ldots$$

Integrînd prin părți, se obține

$$f'(\varphi) = -f(x_1-)\,\varphi(x_1) + f(x_1+)\,\varphi(x_1) - f(x_2-)\,\varphi(x_2) + f(x_2+)\,\varphi(x_2) - \ldots$$

$$\ldots + \int_{-\infty}^{x_1} f'(x)\,\varphi(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\varphi(x)\,dx + \ldots =$$

$$= h_1\varphi(x_1) + h_2\,\varphi(x_2) + \ldots + \int_{-\infty}^{+\infty} \{f'\}\,\varphi\,dx =$$

$$= h_1\langle\delta(x - x_1),\ \varphi(x)\rangle + h_2\langle\delta(x - x_2),\ \varphi(x)\rangle + \ldots + \int_{-\infty}^{+\infty} \{f'(x)\}\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \langle h_1\delta(x - x_1) + h_2\delta(x - x_2) + \ldots,\ \varphi(x)\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \{f'(x)\}\,\varphi(x)\,dx$$

deoarece $h_j = f(x_j +) - f(x_j -)$ este saltul lui f în punctul x_j ; rezultă egalitatea

$$f'(x) = \sum_j h_j \delta(x - x_j) + \{f'(x)\} \tag{2.37}$$

(suma fiind extinsă la toate salturile lui f) care exprimă legătura dintre derivata în sensul teoriei distribuțiilor a unei funcții derivabile pe porțiuni (derivata definind o funcție local sumabilă în $\mathbb{R}$) și distribuția corespunzătoare acestei derivate (calculînd în mod obișnuit). Egalitatea (2.37) arată că avem $f' = \{f'\}$ numai dacă f este continuă ; în particular, dacă $f = H$ (H fiind funcția unitate), avem $H' = 0$ pentru $x < 0$ și $x > 0$, deci $\{H'\} = 0$ și din (2.37) se deduce $H'(x) = \delta(x)$, deoarece H are un singur salt (în origine), valoarea sa fiind egală cu unitatea.

4. Fie $n = 1$ și să considerăm seria trigonometrică

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k};$$

conform cu teoria acestor serii, f va fi periodică, cu perioada egală cu 2π, definită pe intervalul $[-\pi, \pi]$ prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\pi - x}{2} \text{ pentru } -\pi \leqslant x < 0, \\ \dfrac{\pi - x}{2} \text{ pentru } 0 < x \leqslant \pi, \\ 0 \text{ pentru } x = 0, \end{cases}$$

deci este derivabilă pe porțiuni, avînd salturi în punctele $x_j = 2j\pi$, $j = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$ saltul fiind egal cu π. Deoarece $\{f'\} = -1/2$, avem

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2j\pi).$$

Dar $f(x)$ este definită printr-o serie, care, fiind convergentă, va putea fi derivată termen cu termen ; rezultă, așadar, egalitatea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2j\pi).$$

Prin urmare, seria trigonomterică $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$, care este divergentă în sens obișnuit, este convergentă în sensul teoriei distribuțiilor ; derivînd în continuare, se obține

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^p k^{2p} \cos kx = \pi \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta^{(2p)}(x - 2j\pi), \quad p = 1, 2, \ldots$$

Dacă, în general, produsul a două distribuții nu are sens (este vorba bineînțeles de produsul a două distribuții singulare), se poate însă defini *produsul direct* al oricăror două distribuții f și g ; vom defini acest produs prin $f \times g$ scriind

$$\langle f(\mathbf{x}) \times g(\mathbf{y}),\ \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rangle = \langle f(\mathbf{x}),\ \langle g(\mathbf{y}),\ \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle\rangle \tag{2.38}$$

sau

$$\langle f(\mathbf{x}) \times g(\mathbf{y}),\ \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rangle = \langle g(\mathbf{y}),\ \langle f(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rangle\rangle. \tag{2.38'}$$

Se poate verifica ușor că în acest mod s-au definit funcționale liniare și continue pe $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ iar produsul direct a două distribuții este o operație comutativă, adică

$$f(\mathbf{x}) \times g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y}) \times f(\mathbf{x}),$$

asociativă,

$$[f(\mathbf{x}) \times g(\mathbf{y})] \times h(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) \times [g(\mathbf{y}) \times h(\mathbf{z})],$$

fiind valabile egalitățile

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha} \partial \mathbf{y}^{\beta}} [f(\mathbf{x}) \times g(\mathbf{y})] = \frac{\partial^{\alpha} f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} \times \frac{\partial^{\beta} g(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}^{\beta}},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Exemplul 5. Avem

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta(x_1) \times \delta(x_2) \times \ldots \times \delta(x_n) ; \tag{2.39}$$

Într-adevăr, deoarece

$$\langle \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle = \varphi(0, 0, \ldots, 0)$$

iar

$$\langle \delta(x_1) \times \delta(x_2) \times \ldots \times \delta(x_n),\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle =$$

$$= \langle \delta(x_1),\ \langle \delta(x_2),\ \langle \ldots \langle \delta(x_n),\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle\rangle\rangle =$$

$$= \langle \delta(x_1)\ \langle \delta(x_2),\ \langle \ldots \langle \delta(x_{n-1}),\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},\ 0)\rangle\rangle = \ldots$$

$$\ldots = \langle \delta(x_1),\ \varphi(x_1, 0, \ldots, 0)\rangle = \varphi(0, 0, \ldots, 0),$$

din egalitatea membrilor ai doilea se deduce egalitatea membrilor întîi adică

$$\langle \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)\rangle = \langle \delta(x_1) \times \delta(x_2) \times \ldots \times \delta(x_n),\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle$$

ceea ce coincide cu egalitatea (2.39).

În același mod se deduce egalitatea

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = H(x_1) \times H(x_2) \times \ldots \times H(x_n).$$

În sfîrșit, o altă operație deosebit de importantă în practică și în teorie este *convoluția* a două distribuții; pentru a defini această operație, vom presupune inițial că f, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ sînt distribuții regulate, pentru care convoluția $f * g$ se definește prin

$$(f*g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

$$\left(= \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int f(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) g(y_1, \ldots, y_n) d\mathbf{y}\right), \quad (d\mathbf{y} = dy_1 \ldots dy_n),$$

în ipoteza că această integrală improprie cu parametri există, iar existența acestor integrale se poate demonstra cel puțin în următoarea situație :

Dacă f, $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, supp $f \subset A$, supp $g \subset B$, A și B fiind mulțimi din $\mathbb{R}^n$ astfel încît pentru orice $r > 0$ mulțimea

$$M_r\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B, \|\mathbf{x} + y\| < r\}$$

este mărginită în $\mathbb{R}^{2n}$, cînd $f * g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ (deoarece, folosind posibilitatea de întervertire a ordinei de integrare, avem

$$\int_{\|\mathbf{x}\|<r} |f*g|\, d\mathbf{x} \leqslant \int_{\|\mathbf{x}\|<r} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\, |g(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}\right] d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{M_r} |f(\mathbf{y})|\, |g(\mathbf{z})|\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{z} < \infty)$$

Dacă, în particular, f și g au suportul compact, rezultă că M_r este o mulțime mărginită.

Funcționala corespunzătoare funcției $f * g$ va fi

$$\langle f*g, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\right] \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y}) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right] d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y}) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z})\, \varphi(\mathbf{z}+\mathbf{y})\, d\mathbf{z}\right] d\mathbf{y},$$

ultima egalitate obținîndu-se cu ajutorul schimbării de variabile $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z}$ (adică $x_j - y_j = z_j$, $j = 1,2,\ldots, n$) al cărei jacobian este nenul; se obține egalitatea

$$\langle f*g, \varphi\rangle = \langle g(\mathbf{x}) \times f(\mathbf{y}),\ \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle \quad (= \langle f(\mathbf{x}) \times g(\mathbf{y}),\ \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle) \qquad (2.40)$$

care va constitui relația de definiție a convoluției distribuțiilor f, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, care se poate scrie și sub forma $\langle f*g, \varphi = \langle f(\mathbf{x}), \langle g(\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle\rangle$.

O observație importantă care trebuie făcută este aceea că deși $\varphi(\mathbf{x})$ este o funcție cu suport compact în $\mathbb{R}^n$, $\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ nu are suportul compact în $\mathbb{R}^{2n}$ și de aceea funcționala (2.40) nu va defini o distribuție pentru orice f, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$; în particular dacă f (sau g) are suportul compact, înțelegînd prin *suportul distribuției* f, notat prin supp f, mulțimea

$$\text{supp } f = \complement \bigcup_j A_j,$$

$A_j \subset \mathbb{R}^n$, $\langle f, \varphi\rangle = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, supp $\varphi \subset A_j$, A_j fiind o mulțime deschisă oarecare cu proprietatea amintită.

În afară de proprietatea de comutativitate $f*g = g*f$, convoluția mai verifică egalitățile

$$\delta * f = f \qquad (2.41)$$

pentru orice $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ [deoarece din egalitatea $\langle \delta(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle = \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})|_{x=0} = \varphi(\mathbf{y})$ rezultă

$$\langle \delta * f, \varphi\rangle = \langle f(\mathbf{y}), \langle \delta(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle\rangle = \langle f(\mathbf{y}),\ \varphi(\mathbf{y})\rangle = \langle f,\ \varphi\rangle,$$

adică, în baza definiției egalității a două distribuții, avem egalitatea (2.41)],

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}(f*g) = \frac{\partial^m f}{\partial x^m} * g = f * \frac{\partial^m g}{\partial x^m} \qquad (2.42)$$

[deoarece

$$\left\langle \frac{\partial^m}{\partial x^m}(f*g),\ \varphi \right\rangle = (-1)^{|m|} \left\langle f*g, \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m} \right\rangle =$$

$$= (-1)^{|m|} \left\langle g(\mathbf{y}), \left\langle f(\mathbf{x}), \frac{\partial^m \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}^m} \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \left\langle g(\mathbf{y}), \left\langle \frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x^m},\ \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \right\rangle \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^m} * g(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}) \right\rangle,$$

adică $\dfrac{\partial^m}{\partial \mathbf{x}^m}(f*g) = \dfrac{\partial^m f}{\partial \mathbf{x}^m} * g$, ultima egalitate (2.42) obținîndu-se în baza relației $f*g = g*f$, deci $\dfrac{\partial}{\partial x^m}(f*g) = \dfrac{\partial^m}{\partial \mathbf{x}^m}(g*f) = \dfrac{\partial^m g}{\partial \mathbf{x}^m} * f =$

$= * f \dfrac{\partial^m g}{\partial \mathbf{x}^m}$].

Considerațiile de mai sus s-au realizat în ipoteza că o distribuție (în sensul lui Schwartz) este o funcțională liniară și continuă definită pe spațiul $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$; dar considerarea spațiului $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ nu este singura posibilitate iar pentru tratarea mai simetrică a transformării Fourier este mai comodă utilizarea spațiului $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ în locul spațiului $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Se spune că $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dacă $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ și dacă pentru orice multiindici $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ există $C \in \mathbb{R}$, $C = C(\varphi, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, astfel încît

$$\left| \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \frac{\partial^{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{q}}} \right| \leqslant C, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{2.43}$$

unde s-a notat

$$\mathbf{x}^{\mathbf{p}} = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}, \quad \frac{\partial^q \varphi(\mathbf{x})}{\partial x^q} = \frac{\partial^{q_1+q_2+\ldots+q_n} \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \ldots \partial x_n^{q_n}};$$

funcțiile din $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ au proprietatea că descresc (împreună cu derivatele lor parțiale de orice ordin) la infinit mai repede decît orice putere ale variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, după cum se deduce din inegalitățile

$$\left| \frac{\partial^{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{q}}} \right| \leqslant \frac{C}{|x_1|^{q_1} \ldots |x_n|^{q_n}}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

care reprezintă o altă formă pentru (2.43).

Convergența în $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se definește astfel: șirul $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ din $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ converge către $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dacă pentru orice multiindice $\mathbf{q}$, $|\mathbf{q}| = 0, 1, 2, \ldots$, șirul derivatelor parțiale $\left(\frac{\partial^{\mathbf{q}} \varphi_j}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{q}}} \right)_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniform pe orice compact din $\mathbb{R}^n$ către $\frac{\partial^{\mathbf{q}} \varphi}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{q}}}$ și dacă în inegalitățile

$$\left| \mathbf{x}^{\mathbf{q}} \frac{\partial^{\mathbf{q}} \varphi_j}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{q}}} \right| < C(\varphi, \mathbf{p}, \mathbf{q})$$

constantele C nu depind de indicele $j \in \mathbb{N}$.

Evident $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \supset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, ceea ce implică $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, deci mulțimea funcționalelor liniare și continue definite pe spațiul $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, pe care le vom numi *distribuții temperate*, este mai puțin bogată în elemente decît mulțimea $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$; astfel, funcția

$$f(\mathbf{x}) = e^{||\mathbf{x}||^{2m}} = e^{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^m}, \quad m = 1,2,\ldots,$$

fiind local integrabilă în $\mathbb{R}^n$, va defini o distribuție regulată din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ dar deoarece exponențiala e^x crește cînd $x \to +\infty$ mai repede decît orice putere a variabilei x, funcționala

$$\langle f(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\|\mathbf{x}\|^{2m}) \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

nu va fi mărginită (deci nu va fi continuă) pentru orice $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dacă $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, spațiul $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ [sau spațiul $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$] va fi complex, iar funcționalele liniare și continue definite pe aceste spații vor fi distribuții complexe și în acest caz se pot defini atît distribuții f în care

$$\langle f, \alpha\varphi \rangle = \alpha \langle f, \varphi \rangle,$$

cît și distribuții f conjugate, pentru care

$$\langle f, \alpha\varphi \rangle = \bar{\alpha} \langle f, \varphi \rangle.$$

Distribuțiile f regulate pot fi definite prin una din următoarele egalități:

$$\langle f, \varphi \rangle_1 = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad \langle f, \varphi \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

$${}_1\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, \bar{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad {}_2\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(\mathbf{x})\, \bar{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

alegerea uneia din aceste patru posibilități fiind determinată de problemele concrete avute în vedere.

Distribuțiile anterioare au fost definite în $\mathbb{R}^n$, dar uneori se utilizează distribuții definite pe un compact, cel mai simplu exemplu fiind acela al distribuțiilor definite pe sfera $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = R$ din $\mathbb{R}^n$; aceste distribuții se definesc într-o manieră analogă definiției distribuțiilor din $\mathbb{R}^n$. Astfel, se consideră mulțimea tuturor funcțiilor indefinit derivabile pe sfera în cauză (care definesc un spațiu vectorial) în care convergența sinusilor $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ se definește astfel: $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(S_r)} \varphi$ (S_r fiind sfera în cauză) dacă șirurile derivatelor $\left(\frac{\partial^m \varphi_j}{\partial x^m} \right)_{j \in \mathbb{N}}$ converg uniform către $\frac{\partial^m \varphi_j}{\partial x^m}$, $m = 0,1,2\ldots$, (deoarece S_r este un compact, nu mai sînt necesare condițiile ca supp $\varphi_j \subset \mathscr{D}_n$). Funcționalele liniare și continue, definite pe $\mathscr{D}(S_r)$ se vor numi *distribuții pe sfera* S_r și pentru aceste distribuții se pot definii toate operațiile anterioare.

2.4.2. Transformarea Fourier a distribuțiilor

Aplicarea transformării Fourier în cadrul funcțiilor este limitată deoarece pentru funcții simple, frecvent întîlnite (cum sînt de exemplu, polinoamele) nu se poate defini această transformare; în cadrul teoriei distribuțiilor nu mai apar astfel de restricții: oricărei distribuții i se poate calcula transformata Fourier într-un sens bine precizat.

Transformarea Fourier are particularitatea că transformă bijectiv spațiul $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ în el însuși; dar dacă $\varphi \in (\mathbb{R}^n)$ atunci $\hat{\varphi} \notin \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ și vom nota prin $\mathscr{Z}(\mathbb{R}^n)$ spațiul vectorial al funcțiilor ψ, $\psi(\xi) = \mathscr{F}[\varphi(\mathbf{x})](\xi)$ cu $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x})\, e^{i(x,\,\xi)}\, d\mathbf{x} = \int_{A_n} \varphi(\mathbf{x})\, e^{i(x,\,\xi)}\, d\mathbf{x}$$

(dacă A_n este paralelipipedul n-dimensional $[-a_1, a_1]\times[-a_2, a_2]\times\ldots\times[-a_n, a_n]$ astfel încît supp $\varphi \subset A_n$). Înlocuind variabilele reale ξ_j, $j = 1,\ldots,n$, prin variabilele complexe ζ_j, $j = 1,\ldots,n$, $\xi_j = \operatorname{Re}\xi_j$, $\eta_j = \operatorname{Im}\zeta_j$, vom scrie $\mathscr{Z}(\mathbb{C}^n)$ în loc de $\mathscr{Z}(\mathbb{R}^n)$ și prin calcule simple se pot obține egalitățile importante:

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^k \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^k}\right](\zeta) = (-i\zeta)^k\, \mathscr{F}[\varphi(\mathbf{x})](\zeta), \tag{2.44}$$

$$\mathscr{F}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\varphi\right](\zeta) = P(-i\zeta)\,\hat{\varphi}(\zeta) \tag{2.45}$$

cu $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$, $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ fiind un operator diferențial oarecare cu coeficienți constanți. Elementele $\psi(\zeta) = \hat{\varphi}(\zeta)$ vor verifica inegalități de forma

$$|\zeta_1^{k_1}\zeta_2^{k_2}\ldots\zeta_n^{k_n}\hat{\varphi}(\zeta)| \leqslant C_{k_1k_2\ldots k_n}\, e^{(a_1|\eta_1|+a_2|\eta_2|+\ldots a_n|\xi_n|)} \tag{2.46}$$

care sînt caracteristice pentru elementele spațiului $\mathscr{Z}(\mathbb{C}^n)$ care sînt totodată și funcții întregi în variabilele complexe ζ. Vom scrie $\mathscr{Z}(\mathbb{C}^n) = \mathscr{F}[\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)]$; se verifică imediat că $\mathscr{Z}(\mathbb{C}^n)$ este un spațiu vectorial (deoarece transformarea Fourier este o transformare liniară) iar convergența șirurilor din $\mathscr{Z}(\mathbb{C}^n)$ se definește astfel: șirul (ψ_j) din $\mathscr{Z}(\mathbb{C}^n)$ se spune că este convergent către $\psi \in \mathscr{Z}(\mathbb{C}^n)$ dacă șirul $(\varphi_j = \mathscr{F}^{-1}[\psi_j])_{j\in\mathbb{N}}$ converge la $\varphi = \mathscr{F}^{-1}[\psi]$, în sensul convergenței din $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Cu aceste noțiuni, se poate defini transformarea Fourier a distribuțiilor din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$; pentru ușurință, vom presupunem $n=1$ și vom calcula funcționala $\langle \hat{f}, \hat{\varphi}\rangle$, unde $\hat{f}$ este o funcție iar $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Vom avea:

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\,\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{ix\xi}\, dx\right]\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left[\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi\right] dx = 2\pi\int_{\mathbb{R}} f(x)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi)\, e^{-i(-x)\xi}\, d\xi\right] dx =$$

$$= 2\pi\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(-x)\, dx = 2\pi\int_{\mathbb{R}} f(-x)\,\varphi(x)\, dx;$$

notînd $f(-x) = \check{f}(x)$, s-a dedus egalitatea

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi}\rangle = 2\pi\langle \check{f}, \varphi\rangle \qquad (= 2\pi\langle f, \hat{\varphi}\rangle) \tag{2.47}$$

pentru $n=1$, sau

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi}\rangle = (2\pi)^n \langle \check{f}, \varphi\rangle \qquad (= (2\pi)^n \langle f, \check{\varphi}\rangle) \tag{2.47'}$$

dacă $n > 1$. Egalitatea (2.47') poate servi la definirea transformatei Fourier a unei distribuții $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$: vom spune că $\hat{f}$ este transformarea Fourier a distribuției $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ dacă $\hat{f} \in \mathscr{Z}(\mathbb{R}^n)$ și verifică (2.47') pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. În acest mod $\hat{f}$ este o funcțională liniară (deoarece

$$\langle (a_1 f_1 \widehat{+} a_2 f_2), \hat{\varphi}\rangle = (2\pi)^n\langle a_1 f_1 + a_2 f_2, \varphi\rangle = a_1(2\pi)^n\langle f_1, \check{\varphi}\rangle +$$

$$+ a_2(2\pi)^n\langle f_2, \check{\varphi}\rangle = a_1\langle \hat{f}_1, \hat{\varphi}\rangle + a_2\langle \hat{f}_2, \hat{\varphi}\rangle)$$

și continuă (deoarece dacă $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} \varphi$, avem

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi}_j \rangle = (2\pi)^n \langle f, \check{\varphi}_j \rangle \to (2\pi)^n \langle f, \check{\varphi} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle),$$

deci este o distribuție din $\mathscr{Z}' \in (\mathbb{R}^n)$.

Dacă însă f este o distribuție temperată, deci $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, vom presupune $\hat{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definit sau prin aceeași egalitate (2.47′) sau prin egalitatea mai simetrică

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle,$$

deoarece aici $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ iar $\hat{\hat{\varphi}} = (2\pi)^n \check{\varphi}$.

Toate proprietățile valabile pentru transformarea Fourier a funcțiilor vor fi valabile și în cazul transformării Fourier a distribuțiilor; astfel de exemplu $(n = 1)$:

$$\mathscr{F}[f'] = -i\xi \mathscr{F}[f],$$

deoarece

$$\langle \mathscr{F}[f'], \mathscr{F}[\varphi] \rangle = 2\pi \langle f', \check{\varphi} \rangle = -2\pi \langle f, \check{\varphi}' \rangle = 2\pi \langle f(x), \varphi'(-x) \rangle =$$
$$= \langle \mathscr{F}[f], \mathscr{F}[\varphi'] \rangle$$

și cum $\mathscr{F}[\varphi'(x)](\xi) = -i\xi \mathscr{F}[\varphi(x)]$, rezultă

$$\langle \mathscr{F}[f'], \mathscr{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathscr{F}[f], -i\xi \mathscr{F}[\varphi] \rangle = \langle -i\xi \mathscr{F}[f], \mathscr{F}[\varphi] \rangle,$$

adică $\mathscr{F}[f'] = -i\xi \mathscr{F}[f]$. Generalizînd acest rezultat, se deduce

$$\mathscr{F}\left[P\left(\frac{d}{dx}\right) f\right](\xi) = P(-i\xi) \mathscr{F}[f](\xi)$$

pentru orice operator diferențial cu coeficienți constanți.

Din considerațiile anterioare se deduce că orice distribuție [din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ sau din $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$] admite o transformare Fourier care este iarăși o distribuție; în acest mod, dacă o funcție local integrabilă din $\mathbb{R}^n$ nu admite o transformare Fourier în sens ordinar, va admite o transformare Fourier în sensul teoriei distribuțiilor [deoarece orice funcție local integrabilă definește o distribuție din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$].

Să calculăm transformata Fourier a distribuției lui Dirac. Cum

$$\langle \hat{\delta}, \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^n \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^n \varphi(0) = (2\pi)^n \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{-i\langle \xi, x \rangle} \right]_{x=0} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \, d\xi = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle,$$

rezultă

$$\hat{\delta} = 1. \tag{2.48}$$

Reciproc, deoarece $\mathscr{F}^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathscr{F}[\check{f}]$, cum $\mathscr{F}^{-1}[\hat{\delta}] = \delta$, se deduce $\mathscr{F}^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathscr{F}[\check{1}] = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathscr{F}[1] = \delta$, adică

$$\mathscr{F}[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Dacă distribuția f are suportul compact, se poate scrie

$$\hat{f}(\xi) = \langle f(\mathbf{x}), e^{i\langle x, \xi \rangle} \rangle.$$

2.4.3. Soluția elementară și integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale

Din considerațiile anterioare privind teoria distribuțiilor rezultă că această teorie este extrem de convenabilă în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, deoarece nu mai trebuie presupusă derivabilitatea soluțiilor, aceasta decurgînd din integrabilitatea lor; dar deoarece produsul a două distribuții oarecare nu are, în general, sens, utilizarea distribuțiilor este limitată la teoria ecuațiilor liniare cu coeficienți indefinit derivabili (sau cu coeficienți de clasă C^m dacă ecuația are ordinul m, cînd însă distribuțiile nu vor putea fi derivate decît pînă la ordinul m).

Fie deci ecuația liniară

$$\sum_{|k|=0}^{m} a^k(\mathbf{x}) \frac{\partial_k u}{\partial \mathbf{x}^k} = F(\mathbf{x}) \tag{2.48}$$

cu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, $m \geqslant 2$; cu ajutorul operatorului diferențial liniar

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{m} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \frac{\partial^{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}} \tag{2,49}$$

ecuația (2.48) se poate scrie sub forma simbolică

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u = F(\mathbf{x}). \tag{2.48'}$$

Prin *soluție distribuție* (sau *soluție generalizată*) a ecuației (2.48) în domeniul $G_n \subset \mathbb{R}^n$ se înțelege o distribuție $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ care verifică această ecuație în G_n, în sensul teoriei distribuțiilor, adică, pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, supp $\varphi \subset G_n$ să avem

$$\langle \mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u,\ \varphi(\mathbf{x})\rangle = \langle F(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x})\rangle \tag{2.50}$$

Utilizînd operatorul formal adjunct $\mathrm{L}^+(\mathbf{x}, \mathrm{D})$ (vezi cap. 4, vol. II), definit prin

$$L^+(\mathbf{x},\ \mathrm{D})\ \varphi = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{m} (-1)^{|\mathbf{k}|} \frac{\partial^{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}} (a_{\mathbf{k}}\ \varphi), \tag{2.51}$$

relația de definiție (2.50) se transcrie

$$\langle u,\ \mathrm{L}^+(\mathbf{x}, \mathrm{D})\varphi\rangle = \langle F,\ \varphi\rangle. \tag{2.50'}$$

Termenul liber F poate fi o distribuție, $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Uneori aceste relații vor fi valabile și dacă $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ceea ce va permite utilizarea distribuțiilor temperate ca soluții distribuții; în acest caz însă trebuie ținut seama că trecerea de la (2.50) la (2.50') poate să facă să intervină termeni suplimentari calculați pe ∂G_n.

Dacă u este o soluție în sens ordinar, deci $u \in C^m(G_n)$ și verifică ecuația (2.48) în fiecare punct din G_n, atunci u va fi și o soluție distribuție, deoarece calculele anterioare pot fi justificate în cadrul obișnuit al funcțiilor derivabile; reciproc, o soluție distribuție a ecuației (2.48), $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ va fi o soluție ordinară a ecuației date dacă $u \in C^m(G_n)$ și $F \in C^0(D_n)$: deoarece egalitatea (2.50') este echivalentă cu egalitatea $\langle L(\mathbf{x}, D)u - F(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x})\rangle = 0$, adică, deoarece $\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u - F(\mathbf{x}) \in C^0(G_n)$, avem

$$\langle \mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u - F(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x})\rangle = \int_{G_n} [\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u - F(\mathbf{x})]\varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$$

și cum $\varphi \in C_0^\infty(G_n)$ este oarecare, lema fundamentală a calculului variațiilor arată că

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u - F(\mathbf{x}) = 0, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in G_n.$$

Evident, nu orice soluție distribuție a unei ecuații cu derivate parțiale va fi o soluție ordinară, după cum vom vedea în exemplul de mai jos, ceea ce face ca efectiv, prin utilizarea teoriei distribuțiilor, să se lărgească cadrul de aplicabilitate al integrării ecuațiilor cu derivate parțiale.

Exemplul 6. Să considerăm ecuația coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

care, dacă $f \in C^2(\mathbb{R})$, admite ca soluție $u(x, y) = f(x - y)$; dacă însă f nu este de clasă C^2, atunci f trebuie interpretat ca soluție distribuție (evident, presupunînd f local integrabil în $\mathbb{R}$).

Într-adevăr, notînd

$$\mathrm{L}(\mathrm{D}) = \mathrm{D}_x^2 - \mathrm{D}_y^2,$$

avem $\mathrm{L}^+ = \mathrm{L}$ și relația (2.50') se transcrie

$$\langle u,\ \mathrm{L}\varphi\rangle = 0,$$

ea fiind verificată pentru $u = f(x - y)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$; dacă $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, fie (f_n) un șir de polinoame astfel încît $f_n \to f$ (convergență în L_1). Deoarece $f_n(x - y)$ este soluție ordinară pentru ecuația $\mathrm{L}(\mathrm{D})\, u = 0$, avem

$$\langle f_n,\ \mathrm{L}\varphi\rangle = 0$$

și prin trecere la limită găsim $\langle f,\ L\varphi\rangle = 0$.

Dacă f este o distribuție singulară, atunci și $f(x - y)$ va verifica ecuația coardei; vom verifica acest rezultat în ipoteza $f = \delta$, presupunînd y parametru. Vom avea

$$\langle \delta(x - y),\ \varphi(x)\rangle = \varphi(y)$$

și deci

$$\frac{\partial}{\partial y}\langle (x - y),\ \varphi(x)\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}\, \delta(x - y),\ \varphi(x)\right\rangle = \varphi'(y);$$

dar, deoarece $\varphi'(y) = \langle \delta(x - y),\ \varphi'(x)\rangle = -\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\, \delta(x - y),\ \varphi(x)\right\rangle$, se deduce egalitatea

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y}\, \delta(x - y),\ \varphi(x)\right\rangle = \left\langle -\frac{\partial}{\partial x}\, \delta(x - y),\ \varphi(x)\right\rangle = \langle -\delta'(x - y),\ \varphi(x)\rangle$$

care, fiind valabilă pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, arată că

$$\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y) = -\delta'(x-y).$$

Iterînd această egalitate, rezultă

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\delta(x-y) = -[-\delta''(x-y) = \delta''(x-y)] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(x-y),$$

adică $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(x-y) - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\delta(x-y) = 0.$

În integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale un rol important îl joacă noțiunea de *soluție elementară* sau *soluție fundamentală* pe care o vom utiliza în cazul ecuațiilor liniare cu coeficienți constanți.

Vom utiliza două soluții elementare : *o soluție elementară în cazul în care se are în vedere rezolvarea unei probleme Cauchy pentru ecuații omogene și altă soluție elementară în cazul ecuațiilor neomogene.*

Astfel, prin soluția elementară a problemei Cauchy

$$u(t, \mathbf{x})|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(\mathbf{x}), \ \ldots, \ \left.\frac{\partial^{q-1} u(t, \mathbf{x})}{\partial t^{q-1}}\right|_{t=0} = u_{q-1}(\mathbf{x}) \tag{2.52}$$

pentru ecuația cu derivate parțiale

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u - \mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) u = F(t, \mathbf{x}), \tag{2.53}$$

în care P și L sînt operatori diferențiali cu coeficienți constanți

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial^q}{\partial t^q} + a_1 \frac{\partial^{q-1}}{\partial t^{q-1}} + \ldots + a_{q-1}\frac{\partial}{\partial t} + a_q, \tag{2.54}$$

$$\mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant m} b_k \frac{\partial^{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}}, \quad \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n), \ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \tag{2.54'}$$

se înțelege distribuția $\mathscr{E}_t(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ [adică $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$ este o distribuție din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ pentru orice $t \geqslant 0$, t fiind considerat parametru real], care are următoarele proprietăți :

Pentru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ și $t > 0$ verifică ecuația omogenă

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) - L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.53'}$$

iar pentru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ și $t = 0$ verifică datele Cauchy speciale

$$\mathscr{E}_t(\mathbf{x})|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \mathscr{E}_t(\mathbf{x})}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \ \ldots, \ \left.\frac{\partial^{q-2}\mathscr{E}_t(\mathbf{x})}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^{q-1}\mathscr{E}_t(\mathbf{x})}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(\mathbf{x}), \tag{2.52'}$$

$\delta(\mathbf{x})$ fiind distribuția lui Dirac din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Prin soluția elementară a ecuației

$$\mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.55}$$

se înțelege distribuția $\mathscr{E}(\mathbf{x})$ din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ [sau din $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$] care verifică ecuația

$$\mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \tag{2.55'}$$

δ fiind distribuția lui Dirac.

Importanța acestei soluții elementare, care se mai numește și *soluția elementară (fundamentală) a operatorului diferențial* L, constă în faptul că dacă are sens convoluția

$$u(\mathbf{x}) = \mathscr{E}(\mathbf{x}) * F(\mathbf{x}), \tag{2.56}$$

atunci u este soluție (particulară) a ecuației (2.55); într-adevăr, L avînd prin ipoteză coeficienții constanți, avem

$$\mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) u = \mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)[\mathscr{E}(\mathbf{x}) * F(\mathbf{x})] = \left[\mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathscr{E}(\mathbf{x})\right] * F(\mathbf{x}) =$$

$$= \delta(\mathbf{x}) * F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}),$$

utilizînd unele din proprietăţile operaţiei de convoluţie stabilite în 2.4.1.

Aplicînd transformarea Fourier egalităţii (2.55′), rezultă

$$L(-i\xi)\,\hat{\mathscr{E}}(\xi) = 1$$

şi deci soluţia elementară va fi egală cu

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \mathscr{F}^{-1}[\hat{\mathscr{E}}(\xi)\,](\mathbf{x}) = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{L(-i\xi)}\right](\mathbf{x});$$

aşadar, determinarea soluţiei elementare a unui operator diferenţial cu coeficienţi constanţi revine la determinarea distribuţiei $\mathscr{E}$ din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ [sau din $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$] a cărei transformată Fourier coincide cu distribuţia $\frac{1}{L(-i\xi)} \in \mathscr{X}'(\mathbb{R}^n)$ $\left[\text{respectiv } \frac{1}{L(-i\xi)} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\right]$.

Această soluţie elementară nu este unic determinată, deoarece dacă $\mathscr{E}_0$ este o distribuţie soluţie a ecuaţiei omogene $L\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathscr{E}_0(\mathbf{x}) = 0$, distribuţia $\mathscr{E} + \mathscr{E}_0$ va fi iarăşi o soluţie elementară a operatorului L; de obicei, se utilizează distribuţia $\mathscr{E}_0$ pentru a se verifica anumite condiţii suplimentare în care se integrează ecuaţia dată, cînd $\mathscr{E} + \mathscr{E}_0$ se numeşte *distribuţie Green a operatorului* L.

Exemplul 7. În cazul operatorului lui Laplace din $\mathbb{R}^3$

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

soluţia elementară, adică o soluţie distribuţie a ecuaţiei $\Delta_3 u(x_1, x_2, x_3) = \delta(x_1, x_2, x_3)$ va putea fi scrisă sub forma

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) = \mathscr{F}^{-1}[-\|\xi\|^{-2}](\mathbf{x}),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

deoarece aici $L\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ iar $L(-i\xi) = (-i\xi_1)^2 + (-i\xi_2)^2 + (-i\xi_3)^2 = -\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 = -\|\xi\|^2$; dar în $\mathbb{R}^3$ funcţia $\|\xi\|^2$ este local integrabilă şi de aceea

$$\xi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\|\xi\|^3}e^{-i(x,\,\xi)}\,d\xi,\ (\mathbf{x}, \xi) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3.$$

Cum funcţia $\|\xi\|^2$ are simetrie sferică (adică în coordonate sferice nu depinde decît de distanţa la origine, nedepinzînd de unghiurile θ şi φ), trecînd în coordonate sferice se poate presupune produsul scalar $(\mathbf{x}, \xi)$ egal cu $\|\mathbf{x}\|\,\|\xi\|\cos\theta$, θ fiind coordonată sferică (ceea ce revine la calculul lui $\mathscr{E}(\mathbf{x})$ pe axa Ox_3) şi de aceea avem

$$\mathscr{E}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} e^{-i\|x\|\,r\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

deoarece $d\xi = \|\xi\|^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$, $r = \|\xi\|$; calculînd integralele în raport cu θ şi φ, se deduce

$$\mathscr{E}(\mathbf{x}) - = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin(\|\mathbf{x}\|\,r)}{\|\mathbf{x}\|\,r}\,dr = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{\|\mathbf{x}\|},$$

utilizînd egalitatea $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Aşadar, soluţia elementară a operatorului lui Laplace din $\mathbb{R}^3$ este

$$\mathscr{E}_3(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}};$$

în $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, soluţia elementară se poate afla pe aceeaşi cale, utilizînd faptul că funcţia $\|\xi\|^{-2}$, $\|\xi\| = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n)^{1/2}$ este local integrabilă în $\mathbb{R}^n$, obţinîndu-se

$$\mathscr{E}_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2-n)\,\omega_n}\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}} = \frac{1}{(2-n)\,\omega_n}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{2-n},\ n \geq 3,$$

unde $\omega_n = 2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ este aria sferei unitate din $\mathbb{R}^n$.

În $\mathbb{R}^2$ însă funcţia $\|\xi\|^{-2} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}$ nu este local integrabilă şi de aceea transformarea Fourier inversă $\mathscr{F}^{-1}[-\|\xi\|^{-2}]$ trebuie calculată pe altă cale, utilizînd metode de regularizare a integralelor divergente (vezi punctul următor); utilizînd însă faptul că prin înlocuirea lui n din $\mathscr{E}_n$ printr-o variabilă complexă z, funcţia

$$\mathscr{E}_z(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2-z)\,\omega_z}\|\mathbf{x}\|^{2-z},\quad \omega_z = 2\frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}$$

este analitică în vecinătatea lui $z = 2$, vom scrie

$$\mathscr{E}_2(\mathbf{x}) = \lim_{z\to 2}\mathscr{E}_z(\mathbf{x})$$

și prin aplicarea regulii lui l'Hospital, vom avea

$$\mathscr{E}_2(y) = \lim_{z\to 2} \frac{1}{(2-z)\omega_z} \|\mathbf{x}\|^{2-z} = \frac{1}{\omega_2} \lim_{z\to 2} \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-z}}{2-z} = \frac{1}{2\pi} \ln(\|\mathbf{x}\|),$$

deoarece $\omega_2 = 2\pi$. Așadar, este posibil ca soluția elementară a operatorului Laplace Δ_2 să fie egală cu

$$\mathscr{E}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

și deoarece se poate verifica ușor că

$$\langle \Delta_2 \mathscr{E}_2(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \varphi(0),\ \varphi = \varphi(x_1, x_2),$$

rezultă legitimitatea calculelor care au condus la expresia în discuție.

Cu ajutorul soluției elementare $\mathscr{E}_2(\mathbf{x})$ se poate obține și soluția elementară a operatorului de derivare areolară (vezi cap. 5, vol. II), adică distribuția $\mathscr{E}(z, \bar{z})$ cu proprietatea

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathscr{E}(z, \bar{z}) = \delta(z, \bar{z}),$$

unde

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

evident, $\mathscr{E}(z, \bar{z}) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$, raportînd $\mathbb{R}^2$ la variabilele z și $\bar{z}$); deoarece dacă notăm $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, avem $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{4}\Delta_2$, se deduce

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathscr{E}(z, \bar{z})\right] = \frac{\partial}{\partial z}\delta(z, \bar{z}),$$

adică

$$\Delta_2 \mathscr{E}(z, \bar{z}) = 4\frac{\partial}{\partial z}\delta(z, \bar{z}).$$

Cum o soluție a ecuației $\Delta_2 \mathscr{E}(z, \bar{z}) = F(z, \bar{z})$, $F = 4\delta$ se scrie sub forma

$$\mathscr{E}(z, \bar{z}) = \mathscr{E}_2(x, y) * \left[4\frac{\partial}{\partial z}\delta(z, \bar{z})\right] = 4\frac{\partial}{\partial z}[(\mathscr{E}_2(x, y) * \delta(x, y)]$$

[deoarece $\delta(z, \bar{z})$ este transcrierea complexă pentru distribuția $\delta(x, y)$], se obține

$$\mathscr{E}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\pi z},\ z = x + iy.$$

Trecînd la cazul distribuției $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$ definită prin (2.52') și (2.53') (în care $t \geqslant 0$ este un parametru), prin aplicarea transformării Fourier în raport cu variabilele $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se deduce că distribuția

$$\hat{\mathscr{E}}_t(\xi) = \mathscr{F}_x[\mathscr{E}_t(\mathbf{x})](\xi) \tag{2.57}$$

va verifica ecuația diferențială

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{\mathscr{E}}_t(\xi) - P(-i\xi)\ \hat{\mathscr{E}}_t(\xi) = 0 \tag{2.58}$$

și condițiile inițiale

$$\mathscr{E}_t(\xi)\Big|_{t=0} = 0, \ldots, \frac{\partial^{q-2}\mathscr{E}_t(\xi)}{\partial t^{q-2}}\Big|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial^{q-1}\mathscr{E}_t(\xi)}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = 1 \tag{2.58'}$$

Aplicînd, de exemplu, metoda expusă în cap. 8, vol. I, $\hat{\mathscr{E}}_t(\xi)$ va fi unic determinat și atunci, în baza lui (2.57), vom avea

$$\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) = \mathscr{F}_x^{-1}[\hat{\mathscr{E}}_t(\xi)](\mathbf{x}); \tag{2.57'}$$

dacă $\mathscr{E}_t$ este o funcție local integrabilă în $\mathbb{R}^n$, vom putea scrie

$$\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\mathscr{E}}_t(\xi)\, e^{-i(x,\ \xi)}\, d\xi. \tag{2.57''}$$

Exemple. 8. În cazul ecuației căldurii din $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = F(t, \mathbf{x}),$$

soluția elementară $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$ corespunzătoare problemei Cauchy

$$u(t, \mathbf{x})|_{t=0} = u_0(\mathbf{x})$$

va verifica ecuația

$$\frac{\partial \mathscr{E}_t(\mathbf{x})}{\partial t} - \Delta_n \mathscr{E}_t(\mathbf{x}) = 0$$

și condiția inițială

$$\mathscr{E}_t(\mathbf{x})|_{t=0} = \delta(\mathbf{x}).$$

Aplicînd transformarea Fourier în raport cu variabilele $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, vor rezulta condițiile în care se determină $\hat{\mathscr{E}}_t(\xi)$:

$$\frac{\partial \hat{\mathscr{E}}_t(\xi)}{\partial t} + \|\xi\|^2\ \hat{\mathscr{E}}_t(\xi) = 0,\ \hat{\mathscr{E}}_t(\xi)|_{t=0} = 1$$

și se deduce

$$\mathscr{E}_t(\xi)x = e^{-||\xi||^2 t};$$

aplicînd (2.57′), rezultă

$$\mathscr{E}_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||\xi||^2 t - i(x,\,\xi)}\,d\xi = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{||x||^2}{4t}}.$$

9. În cazul ecuației coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x)$$

și a problemei Cauchy

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x),$$

soluția elementară $\mathscr{E}_t(x)$ va verifica

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}_t(x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathscr{E}_t(x)}{\partial x^2} = 0, \quad \mathscr{E}_t(x)_0\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \mathscr{E}_t(x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

prin urmare, transformata sa Fourier în raport cu x, va verifica

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathscr{E}}_t(\xi)}{\partial t^2} + \xi^2 \hat{\mathscr{E}}_t(\xi) = 0, \quad \hat{\mathscr{E}}_t(\xi)\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\mathscr{E}}_t(\xi)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 1,$$

deci

$$\hat{\mathscr{E}}_t(\xi) = \frac{1}{\xi}\sin(\xi t);$$

cum $\hat{\mathscr{E}}_t(\xi)$ este o funcție local integrabilă, rezultă

$$\mathscr{E}_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\xi}_t(\xi)\, e^{-ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi}\sin(\xi t)\, e^{-i\xi x}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i\xi}\left[e^{-i\xi(x-t)} - e^{-i\xi(x+t)}\right] d\xi.$$

Ținînd seama că dacă $f(x) = \frac{1}{2}$, $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$, $x \notin [a, b]$, atunci

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2i\xi}(e^{ib\xi} - e^{ia\xi}),$$

rezultă $a = -x - t$, $b = t - x$ și deci

$$\mathscr{E}_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } |x| < t, \\ 0, & \text{dacă } |x| > t. \end{cases}$$

10. Fie ecuația de ordinul al treilea

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = F(t, x)$$

și problema Cauchy

$$u(t, x)|_{t=0} = u_0(x);$$

soluția elementară $\mathscr{E}_t(x)$ a acestei probleme Cauchy va verifica deci ecuația

$$\frac{\partial \mathscr{E}_t(x)}{\partial t} - \frac{\partial^3 \mathscr{E}_t(x)}{\partial x^3} = 0$$

și condiția inițială

$$\mathscr{E}_t(x)|_{t=0} = \delta(x).$$

Cu ajutorul transformării Fourier se deduce că distribuția $\hat{\mathscr{E}}_t(\xi)$ va verifica ecuația diferențială

$$\frac{\partial \hat{\mathscr{E}}_t(\xi)}{\partial t} - i\xi^3 \hat{\mathscr{E}}_t(\xi) = 0$$

și condiția inițială $\hat{\mathscr{E}}_t(\xi)_{t=0} = 1$ și deci

$$\hat{\mathscr{E}}_t(\xi) = e^{i\xi^3 t};$$

funcția $\exp(i\xi^3 t)$ fiind local integrabilă, rezultă

$$\mathscr{E}_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^3 t - ix\xi} d\xi.$$

Utilizînd teoria funcțiilor Bessel din cap. 13, vol. I, se deduce

$$\mathscr{E}_t(x) = \frac{1}{2\pi} t^{-\frac{1}{3}} A_1(x t^{-\frac{1}{3}}),$$

A_1 fiind una din funcțiile lui Airy.

Cu ajutorul soluției elementare $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$ se poate rezolva problema Cauchy

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}), \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial^{q-1} u(t, \mathbf{x})}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = u_{q-1}(\mathbf{x}) \tag{2.52}$$

pentru ecuația

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u - \mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) u = F(t, \mathbf{x}); \tag{2.53}$$

soluția se obține în etape, scriind $u = u_h + u_p$, în care u_h este soluția ecuației omogene

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u - \mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) u = 0 \tag{2.53'}$$

care verifică datele Cauchy (2.52) iar u_p este soluția ecuației (2.53) care verifică problema Cauchy (2.52) cu $u_0 = u_1 = \ldots = u_{q-1} = 0$.

Soluția u_h se va obține și ea succesiv, utilizînd distribuția $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$ și faptul că operatorul $\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)$ are coeficienți constanți, ceea ce are drept consecință faptul că dacă u verifică ecuația

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u - \mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) u = 0,$$

atunci orice derivată $\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial t^{\alpha} \partial \mathbf{x}^{\beta}}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, va fi soluție a aceleiași ecuații, deoarece

$$\left[\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\right] \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial t^{\alpha} \partial \mathbf{x}^{\beta}} = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial t^{\alpha} \partial \mathbf{x}^{\beta}} \left[\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u - \mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) u\right] = 0.$$

Astfel, convoluția $\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 u_{q-1}(\mathbf{x})$ va verifica ecuația (2.53') deoarece

$$\left[\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] [\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 u_{q-1}(\mathbf{x})] =$$

$$= \left(\left[\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\right] \mathscr{E}_t(\mathbf{x})\right) *_1 u_{q-1}(\mathbf{x}) = 0 *_1 u_{q-1} = 0$$

și condițiile inițiale

$$u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \ldots = \frac{\partial^{q-2} u}{\partial t^{q-2}}\Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial^{q-1} u}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = u_{q-1},$$

(deoarece $\frac{\partial^j}{\partial t^j} [\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 u_{q-1}(\mathbf{x})]\Big|_{t=0} = \frac{\partial^j \mathscr{E}_t(\mathbf{x})}{\partial t^j}\Big|_{t=0} *_1 u_{q-1} = 0$, $j = 0,1,\ldots,q-2$, iar $\frac{\partial^{q-1} u}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^{q-1} \mathscr{E}_t(\mathbf{x})}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} *_1 u_{q-1}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) * u_{q-1}(\mathbf{x}) = u_{q-1}(\mathbf{x})$; s-a notat prin $*_1$ operația de convoluție în raport cu variabilele $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$).

Notînd cu $u(t, \mathbf{x}; u_{q-1})$ această soluție, adică

$$u(t, \mathbf{x}; u_{q-1}) = \mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 u_{q-1}(\mathbf{x})$$

(în ipoteza că $u_{q-1} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ este astfel încît convoluția are sens), va rezulta că distribuția

$$u_1(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} u(t, \mathbf{x}; u_{q-2}),$$

în care u_{q-2} este definit prin condițiile inițiale (2.53), va verifica ecuația omogenă (2.53') precum și condițiile inițiale

$$\frac{\partial^j u_1}{\partial t^j}\Big|_{=0} = 0, \qquad j = 0,1,\ldots,q-3,$$

$$\frac{\partial^{q-2} u_1}{\partial t^{q-2}}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^{q-1} u(t, \mathbf{x}; u_{q-2})}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = u_{q-2}(\mathbf{x}),$$

$$\frac{\partial^{q-1} u_1}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^q u(t, \mathbf{x}; u_{q-2})}{\partial t^q}\Big|_{t=0} = v(\mathbf{x}),$$

unde distribuția v se poate determina cu ajutorul ecuației (2.53') explicitîndu-l pe $\frac{\partial^q u}{\partial t^q}$ și punînd apoi $t = 0$. Construind distribuția

$$u_2(t, x) = u_1(t, \mathbf{x}) - u(t, \mathbf{x}; v),$$

se deduce imediat că u_2 verifică ecuația omogenă (2.52′) și condițiile inițiale (2.58) în care $u_0 = u_1 = \ldots = u_{q-3} = 0$; prin acest procedeu, definind $u_3 = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, \mathbf{x}; u_{q-3})$ și utilizînd pe u_2, se obține soluția problemei Cauchy (2.58) în care $u_0 = u_1 = \ldots = u_{q-4} = 0$ etc., urmînd ca u_h să se obțină prin însumarea soluțiilor parțiale găsite.

Exemplul 11. Ținînd seama de exemplul 9, soluția ecuației coardei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

care verifică datele inițiale

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x)$$

va fi

$$u_1(t, x) = \mathscr{E}_t(x) *_1 g(x);$$

convoluția va exista pentru orice distribuție $g_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ avînd suportul compact (deoarece $\mathscr{E}_t$ nu are suportul compact). În particular, dacă g este o distribuție regulată, avem

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy,$$

deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}_t(y)\, u_1(x - y)\, dy = \frac{1}{2} \int_{-t}^{t} g(x - y)\, dy$$

și este suficient să se scrie y în loc de $x - y$.

Cum $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \mathscr{E}_t}{\partial t^2} *_1 g = \dfrac{\partial^2 \mathscr{E}_t}{\partial x^2} *_1 g$ iar $\mathscr{E}_t(x)\Big|_{t=0} = 0$, se deduce $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = 0$, așa că notînd

$$u_2(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \mathscr{E}_t(x) *_1 f(x)$$

u_2 va fi soluția ecuației coardei vibrante corespunzînd condițiilor inițiale

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

iar

$$u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \mathscr{E}_t(x) *_1 f(x) + \mathscr{E}_t(x) *_1 g(x)$$

va fi soluția ecuației coardei vibrante care corespunde condițiilor inițiale

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x).$$

Dacă distribuțiile f și g sînt regulate, deoarece

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathscr{E}_t(x) *_1 f(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-t}^{x+t} f(y)\, dy = \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t)],$$

această soluție se scrie

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy.$$

Notînd cu $\mathscr{E}(t, \mathbf{x})$ soluția elementară a ecuației (2.53) care corespunde condițiilor inițiale (2.52) nule, vom arăta ca aceasta se poate scrie sub forma

$$\mathscr{E}(t, \mathbf{x}) = H(t)\, \mathscr{E}_t(\mathbf{x}), \tag{2.59}$$

unde $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$ este soluția elementară verificînd (2.52′) și (2.53′) iar $H(t)$ este funcția unitate (Heaviside). Într-adevăr, aplicînd transformarea Fourier în raport cu variabilele $\mathbf{x}$ ecuației

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \mathscr{E}(t, \mathbf{x}) - \mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \mathscr{E}(t, \mathbf{x}) = \delta(t) \times \delta(\mathbf{x})$$

[deoarece distribuția $\delta(t, \mathbf{x})$ se poate scrie sub forma produsului direct al distribuțiilor $\delta(t) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ și $\delta(\mathbf{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$], se obține ecuația diferențială

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) y(t, \xi) - \mathrm{L}(-\mathrm{i}\xi)\, y(t, \xi) = \delta(t)$$

cu notația $y(t, \xi) = \mathscr{F}_x[\mathscr{E}(t, \mathbf{x})]\ (\xi)$ și este ușor de verificat (utilizînd, de exemplu metodele calculului operațional din cap. 8, vol. I) că

$$y(t, \xi) = \hat{\mathscr{E}}_t(\xi)\, H(t), \tag{2.69′}$$

unde $\hat{\mathscr{E}}_t(\xi)$ este soluția ecuației diferențiale omogene

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)z - L(-i\xi)z = 0$$

care verifică datele Cauchy

$$z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(q-2)}(0) = 0, z^{(q-1)}(0) = 1.$$

Prin urmare, aplicînd transformarea Fourier inversă egalității (2.59'), se deduce (2.59) și, în consecință, soluția ecuației

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(t, \mathbf{x}) - L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, \mathbf{x}) = F(t, \mathbf{x}) \qquad (2.53)$$

care corespunde condițiilor Cauchy nule

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_{t=0} = 0, \ldots, \frac{\partial^{q-1}u(t, \mathbf{x})}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = 0$$

se va putea scrie sub forma

$$u_p(t, \mathbf{x}) = \mathscr{E}(t, \mathbf{x}) * F(t, \mathbf{x})$$

(evident, în ipoteza că această convoluție în raport cu toate variabilele are sens). În concluzie, soluția problemei Cauchy (2.52) pentru ecuația (2.53) se va scrie

$$u(t, \mathbf{x}) = u_h(t, \mathbf{x}) + u_p(t, \mathbf{x});$$

din toate aceste considerații, se deduce că rolul esențial în deducerea acestei soluții îi revine soluției elementare $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$.

Exemple. 12. Pentru ecuația căldurii neomogenă

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = F(t, \mathbf{x})$$

soluția elementară va fi

$$\mathscr{E}(t, \mathbf{x}) = H(t)\,\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) = \frac{H(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n}\,e^{-\frac{||\mathbf{x}||^2}{4t}}$$

iar soluția problemei Cauchy

$$u(t, \mathbf{x})|_{t=0} = 0$$

se va scrie

$$u_p(t, \mathbf{x}) = \mathscr{E}(t, \mathbf{x}) * F(t, \mathbf{x})$$

în ipoteza că această convoluție are sens; dacă F este o distribuție regulată, avem

$$u_p(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{E}(t - s, \mathbf{x} - \mathbf{y})\, F(t, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} =$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \int_{-\infty}^{t} (t - s)^{-\frac{n}{2}}\, ds \int_{\mathbb{R}^n} F(s, \mathbf{y})\, e^{-\frac{||\mathbf{x}-\mathbf{y}||}{4(t-s)}}\, d\mathbf{y}.$$

Presupunînd însă $F(t, \mathbf{x}) = 0$ pentru $t < 0$, ceea ce se impune deoarece practic F se cunoaște pentru $t \geqslant 0$, găsim

$$u_p(t, \mathbf{x}) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^t (t - s)^{-\frac{n}{2}}\, ds \int_{\mathbb{R}^n} F(s, \mathbf{y})\, e^{-\frac{||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2}{(4t-s)}}\, d\mathbf{y}.$$

12. În cazul ecuației coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x)$$

soluția elementară va fi

$$\mathscr{E}(t, x) = H(t)\,\mathscr{E}_t(x);$$

așadar, soluția problemei Cauchy

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

va fi

$$u_p(t, x) = \mathscr{E}(t, x) * F(t, x)$$

(dacă operația de convoluție are sens); dacă F este o distribuție regulată, nulă pentru $t < 0$, se deduce (ținînd seama de exemplul 9)

$$u_p(t, x) \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} F(t - s, x - y)\, \mathscr{E}(s, y)\, dy = \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(s, y)\, dy,$$

ultima egalitate obținîndu-se scriind s în loc de $t - s$ și y în loc de $x - y$ și ținînd seama de aceste schimbări de variabile.

Se poate face observația că în cazul distribuțiilor regulate, determinarea soluției u_p se poate realiza și cu ajutorul principiului lui

Duhamel prezentat în cap. 4, vol. II și anume

$$u_p(t, \mathbf{x}) = \int_0^t v(t - s,\ s,\ \mathbf{x})\ ds,$$

unde $v = v(t,s,x)$ este soluția ecuației omogene

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)v - L\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)v = 0$$

care satisface condițiile Cauchy

$$v\Big|_{t=0} = 0, \ldots, \frac{\partial^{q-2}v}{\partial t^{q-2}}\Big|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial^{q-1}v}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = F(s, \mathbf{x}),$$

$s \geqslant 0$ fiind un parametru.

2.4.4. Operatori diferențiali generelizați

2.4.4.1. *Noțiuni preliminare.* În teoria ecuațiilor diferențiale și a ecuațiilor cu derivate parțiale cu coeficienți constanți, un rol important îl joacă distribuția $x_+^{\lambda-1}$ precum și distribuția „normată"

$$\Phi_\lambda(x) = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)},$$

corespunzătoare distribuției $x_+^{\lambda-1}$. Prin definiție

$$x_+^{\lambda-1} = \begin{cases} x_+^{\lambda-1} & \text{pentru } x > 0, \\ 0 & \text{pentru } x \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.60}$$

Teorema 2.1. *Distribuția $x_+^{\lambda-1}$ (definită ca partea finită în sensul lui Hadamard) este o funcție meromorfă de λ (în planul complex λ), avînd poli simpli în punctele $\lambda = 0, -1, -2, \ldots$, cu reziduul egal cu $\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}(x)$ în polul $\lambda = -k$.*

Pentru $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$, distribuția $x_+^{\lambda-1}$ este regulată așa că funcționala $\langle x_+^{\lambda-1}, \varphi(x)\rangle$ se poate scrie sub formă integrală $\langle x_+^{\lambda-1}, \varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_+^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx = \int_0^{\infty} x_+^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx = \int_0^1 x_+^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx + \int_1^a x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx,$

unde a este astfel ales încît $\mathrm{supp}\ \varphi \subset [-a, +a]$; or integrala $\int_1^a x^{\lambda-1} \times \varphi(x)dx$ reprezintă o funcție olomorfă de λ pentru orice λ (din planul complex $\mathbb{C}$) deoarece derivata în raport cu λ reprezintă o integrală uniform convergentă în planul complex λ. Rămîne de evaluat integrala $\int_0^1 x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx$; deoarece funcția $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, vom putea scrie dezvoltarea în serie Taylor a acesteia cu un număr arbitrar n de termeni iar

$$\left|\varphi(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}x^j\right| \leqslant M\,|x|^{n+1}.$$

Rezultă astfel egalitățile :

$$\int_0^1 x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx = \int_0^1 x^{\lambda-1}\left[\varphi(x) - \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(0)\,x^j\right]dx +$$

$$+\int_0^1 x^{\lambda-1}\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(0)\,x^j\right]dx = \int_0^1 x^{\lambda-1}\left[\varphi(x) - \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(0)\,x^j\right]dx +$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(0)\int_0^1 x^{\lambda+j-1}dx.$$

Este ușor de stabilit că prima integrală este convergentă pentru $\mathrm{Re}\ (\lambda + n + 1) > 0$, deci pentru $\mathrm{Re}\ \lambda > -n-1$; a doua integrală conține o sumă de termeni care pentru $x = 0$ (limita inferioară de integrare) sînt infiniți, dacă $\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant 0$; aplicînd principiul *părții*

finite introdus de J. Hadamard, vom elimina toți termenii care nu sînt finiți în egalitatea anterioară și vom defini distribuția $x_+^{\lambda-1}$ pentru $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$ prin relația

$$\langle x_+^{\lambda-1}, \varphi(x)\rangle = \sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!(\lambda+j)} + \int_0^1 x^{\lambda-1}\left[\varphi(x) - \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(0)x^j\right]dx + \int_1^\infty x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx, \tag{2.61}$$

care arată că în baza definiției date distribuției $x_+^{\lambda-1}$, aceasta este o funcție olomorfă pentru $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, exceptînd $\lambda = 0, -1, \ldots, -n$, unde admite poli simpli; cum n este arbitrar, prima parte a teoremei este demonstrată dacă arătăm că relația (2.61) definește un element din $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$; se verifică ușor că

$$\langle x_+^{\lambda-1}, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2\rangle = a_1\langle x_+^{\lambda-1}, \varphi_1\rangle + a_2\langle x_+^{\lambda-1}, \varphi_2\rangle$$

dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Fie $\varphi_k(x) \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R})} \varphi(x)$, deci $\operatorname{supp}\varphi_k \subset [-a, a]$ și $\varphi_k^{(j)}(x) \to \varphi^{(j)}(x)$ uniform pentru orice $j = 0,1,2,\ldots$; se verifică iarăși imediat, pe relația (2.61), că

$$\lim_{k\to\infty}\langle x_+^{\lambda-1}, \varphi_k\rangle = \langle x_+^{\lambda-1}, \lim_{k\to\infty}\varphi_k\rangle,$$

adică

$$x_+^{\lambda-1} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}),\ \lambda \neq 0, -1, -2, \ldots,$$

iar

$$\operatorname*{Rez}_{\lambda=-k}\langle x_+^{\lambda-1}, \varphi\rangle = \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k}{k!}\langle\delta^{(k)}(x), \varphi(x)\rangle,$$

relație valabilă pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; deci

$$\operatorname*{Rez}_{\lambda=-k} x_+^{\lambda-1} = \frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}(x). \qquad \lrcorner$$

Ținînd seama că funcția gamma are de asemenea poli simpli în $\lambda = 0, -1, -2, \ldots$, reziduul corespunzător lui $\lambda = -k$ fiind egal cu $\frac{(-1)^k}{k!}$, va rezulta, că notînd

$$\Phi_\lambda(x) = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \tag{2.62}$$

distribuția $\Phi_\lambda(x)$ va fi o funcție olomorfă pentru orice λ complex ale cărei valori pentru $\lambda = -k$ se obțin luînd raportul reziduurilor numărătorului și numitorului în acest punct; se obține

$$\Phi_k(x) = \delta^{(k)}(x). \tag{2.63}$$

În acest mod s-a demonstrat teorema următoare:

Teorema 2.2. *Distribuția $x_+^{\lambda-1}$ normată definită prin* (2.62) *este o funcție olomorfă de λ pentru orice λ complex, care pentru $\lambda = 0, -1, -2, \ldots$ are suportul concentrat în origine; pentru $\lambda = -k$, $\Phi_\lambda(x)$ coincide cu distribuția $\delta^{(k)}(x)$.*

Din demonstrațiile anterioare este evident că s-a utilizat definiția următoare: distribuția $f_\lambda(x)$ care depinde de parametrul complex λ este o funcție olomorfă (meromorfă) de λ în domeniul D din planul complex $\mathbb{C}$, dacă pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ funcționala $\langle f_\lambda(x), \varphi(x)\rangle$ este o funcție olomorfă (meromorfă) pentru $\lambda \in D$. În mod analog se definește continuitatea, derivabilitatea etc. distribuției $f_\lambda(x)$ în raport cu parametrul λ.

Vom defini distribuția $\delta_S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ cu ajutorul egalității

$$\langle\delta_S, \varphi\rangle = \int_S \varphi(\mathbf{x})\,d\sigma, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \tag{2.64}$$

unde S este o suprafață (cel puțin netedă pe porțiuni) orientată din $\mathbb{R}^n$ iar $d\sigma$ este elementul de arie pe S. Este evident că $\delta_S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ deoarece

$$\langle\delta_S, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2\rangle = a_1\langle\delta_S, \varphi_1\rangle + a_2\langle\delta_S, \varphi_2\rangle$$

pentru orice $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ iar dacă $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} \varphi$, avem, evident, în baza convergenței uniforme a șirului în cauză pe mulțimea $K \cap S$, $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$,

$$\lim_{j\to\infty}\langle\delta_S, \varphi_j\rangle = \langle\delta_S, \lim_{j\to\infty}\varphi_j\rangle.$$

De regulă, pentru necesităţile noastre vom presupune S mărginit şi închis în $\mathbb{R}^n$, fiind frontiera unui domeniul $D_n \subset \mathbb{R}^n$, mărginit, astfel încît perechii $(S = \partial D_n,\ D_n)$ să i se poată aplica formula flux-divergenţă.

Din (2.64) rezultă că supp $\delta_S \subset S$; într-adevăr, dacă $\mathbf{x}_0 \in S$ iar $V_{\mathbf{x}_0} \subset \mathbb{R}^n$ este o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0$ astfel încît $V_{\mathbf{x}_0} \cap S = \emptyset$, atunci pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ cu supp $\varphi \subset V_{\mathbf{x}_0}$ avem

$$\langle \delta_S,\ \varphi \rangle = \int_S \varphi(\mathbf{x})\, d\sigma = 0,$$

deoarece $\varphi = 0$ pe S.

Dacă μ este o funcţie continuă pe porţiuni pe S, atunci se poate defini distribuţia $\mu(\mathbf{x})\delta_S$ cu ajutorul egalităţii

$$\langle \mu(\mathbf{x})\ \delta_S,\ \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \int_S \mu(\mathbf{x})\ \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},\ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n). \tag{2.65}$$

Evident, ca şi mai sus $\mu\delta_S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, iar supp $(\mu\delta_S) \subset S$.

Prin definiţie, distribuţia $\mu(\mathbf{x})\ \delta_S$ se numeşte *distribuţie de simplu strat* pe hipersuprafaţa S cu distribuţiile de sarcini μ.

Dacă $\boldsymbol{\nu}$ este versorul normalei la S (prin definiţie $\boldsymbol{\nu}$ este versorul normalei exterioare la S dacă $S = \partial D_n$) iar $\mu_1(\mathbf{x})$ este o altă funcţie continuă pe porţiuni definită pe S, se defineşte distribuţia $-\dfrac{\partial}{\partial \nu}(\mu_1\, \delta_S)$ cu ajutorul egalităţii

$$\left\langle -\frac{\partial}{\partial \nu}(\mu_1\, \delta_S),\ \varphi \right\rangle = \int_S \mu_1(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \nu}\, d\sigma,\quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n). \tag{2.66}$$

Tot ca mai înainte, rezultă uşor că $-\dfrac{\partial}{\partial \nu}(\mu_1\, \delta_S) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ iar supp $\left[-\dfrac{\partial}{\partial \nu}(\mu_1\, \delta_S)\right] \subset S$. Prin definiţie, distribuţia $-\dfrac{\partial}{\partial \nu}(\mu_1 \delta_S)$ poartă numele de *distribuţie de dublu strat* definită pe hipersuprafaţa S cu distribuţia de sarcini (dipoli) dată de $\mu_1(\mathbf{x})$.

Distribuţia δ_S este importantă prin aceea că ea permite generalizarea egalităţii (2.37) la spaţiul $\mathbb{R}^n$, $n > 1$; fie $G_n \subset \mathbb{R}^n$, $\partial G_n = S$ şi

fie funcţia $f \in C^1(G_n) \cup C^1(G_n')$, unde $G_n' = \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}_n$, $\bar{G}_n = G_n \cup \partial G_n = G_n \cup S$, astfel încît prin $[f]_S(\mathbf{x})$ vom nota saltul funcţiei f la traversarea lui S:

$$[f]_S(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\mathbf{x}' \to \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \in G_n'}} f(\mathbf{x}') - \lim_{\substack{\mathbf{x}'' \to \mathbf{x} \\ \mathbf{x}'' \in G_n}} f(\mathbf{x}''),\qquad \mathbf{x} \in S.$$

Vom nota prin $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ derivata în sensul teoriei distribuţiilor a distribuţiei regulate corespunzătoare funcţiei f iar $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right\}$ este distribuţia corespunzătoare funcţiei local sumabile în $\mathbb{R}^n$ egală cu $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ atît în G_n cît şi în exteriorul lui G_n. Atunci este valabilă egalitatea

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\} + [f]_S(\mathbf{x})\ \nu_j \delta_S,\quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.67}$$

$(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ fiind componentele lui ν. Într-adevăr, utilizînd formula flux-divergenţă. vom putea scrie egalităţile

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j},\ \varphi \right\rangle = -\left\langle f,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, d\mathbf{x} = -$$

$$-\int_{G_n'} f(\mathbf{x})\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, d\mathbf{x} - \int_{G_n} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, d\mathbf{x} = -\int_{G_n'} \frac{\partial}{\partial x_j}(f\, \varphi)\, d\mathbf{x} -$$

$$-\int_{G_n} \frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi)\, d\mathbf{x} + \int_{G_n'} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, \varphi\, d\mathbf{x} + \int_{G_n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, \varphi\, d\mathbf{x} =$$

$$= \int_S f^+(\mathbf{x})\ \varphi(\mathbf{x})\ \nu_j\, d\sigma - \int_S f^-(\mathbf{x})\ \varphi(\mathbf{x})\ \nu_j\, d\sigma + \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\} \varphi\, d\mathbf{x} =$$

$$= \int_S [f]_S \nu_j \varphi\, d\sigma + \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\} \varphi\, d\mathbf{x},$$

unde

$$f^+ = \lim_{\substack{x' \to x \\ x' \in G_n'}} f(x'), f^- = \lim_{\substack{x'' \to x \\ x'' \in G_n}} f^-(x'');$$

s-a utilizat faptul că în realitate integrala relativă la G_n'(care este un domeniu infinit) se calculează pe $G_n' \cap \text{supp } \varphi$, limita pe $\partial(G_n' \cap \subset \text{supp } \varphi)$ este diferită de zero doar pe S iar ν, fiind normală exterioară la frontiera lui G_n, va fi normală interioară la frontiera domeniului G_n' şi deci este necesară schimbarea semnului din faţa integralei. Aşadar s-a obţinut egalitatea

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \left\langle \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\}, \varphi \right\rangle + \langle [f]_S \nu_j \delta_S, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

care coincide cu relaţia (2.67).

Să presupunem acum $f \in C^2(G_n) \cup C^2(G_n')$ şi să derivăm în raport cu x_k relaţia (2.67); găsim

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} ([f]_S \nu_j \delta_S).$$

Pe de altă parte, expresia $\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\}$ se poate obţine din (2.67) prin înlocuirea lui f prin $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\}$ şi j cu k; se găseşte

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right\} + \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \right]_S \nu_k \delta_S,$$

care conduce la următoarea expresie pentru $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} ([f]_S \nu_j \delta_S) + \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \right]_S \nu_k \delta_S \quad (2.68)$$

Dacă în (2.68) facem $k = j$ şi însumăm pentru $j = 1,2,\ldots,n$, se obţine egalitatea

$$\Delta_n f = \{\Delta_n f\} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} ([f]_S \nu_j \delta_S) + \sum_{j=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \right]_S \nu_j \delta_S. \quad (2.69)$$

Însă, vom putea scrie ($\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$):

$$\left\langle \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} ([f]_S \nu_j \delta_S), \varphi \right\rangle = -\sum_{j=1}^n \left\langle [f]_S \nu_j \delta_S, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle =$$

$$-\sum_{j=1}^n \int_S [f]_S \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \nu_j \, d\sigma = -\int_S [f]_S \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, d\sigma = -\left\langle [f]_S \delta_S, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle$$

şi deoarece

$$-\left\langle [f]_S \delta_S, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \nu} ([f]_S \delta_S), \varphi \right\rangle$$

se obţine egalitatea

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} ([f]_S \nu_j \delta_S) = \frac{\partial}{\partial \nu} ([f]_S \delta_S). \quad (2.70)$$

Apoi, putem scrie egalităţile [$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$]:

$$\left\langle \sum_{j=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \right]_S \nu_j \delta_S, \varphi \right\rangle = \sum_{j=1}^n \left\langle \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \right]_S \nu_j \delta_S \varphi \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_S \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \right]_S \nu_j \varphi \, d\sigma = \int_S \left[\left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \nu_j \right\} \right]_S \varphi \, d\sigma =$$

$$= \int_S \left[\frac{\partial f}{\partial \nu} \right]_S \varphi \, d\sigma = \left\langle \left[\frac{\partial f}{\partial \nu} \right]_S \delta_S, \varphi \right\rangle$$

care conduc la

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left\{\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\}\right]_S \nu_j \delta_S = \left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]_S \delta_S. \tag{2.70'}$$

Utilizînd (2.70) și (2.70') în (2.69), se obține relația

$$\Delta_n f = \{\Delta_n f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial \nu}([f]_S \cdot \delta_S).$$

În particular, dacă $f = 0$ în G_n', avem

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]_S = -\frac{\partial f}{\partial \nu}\bigg|_S, \qquad [f]_S = -f\Big|_S$$

și din (2.70') se obține relația

$$\Delta_n f = \{\Delta_n f\} - \frac{\partial f}{\partial \nu}\delta_S - \frac{\partial}{\partial \nu}(f\delta_S). \tag{2.71}$$

Scriind această egalitate cu ajutorul funcției $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, și utilizînd (2.65) și (2.66), precum și faptul că $\langle \Delta_n f\ \varphi\rangle = \langle f, \Delta_n \varphi\rangle$, se obține identitatea lui Green :

$$\int_{G_n}(f\Delta_n\varphi - \varphi\,\Delta_n f)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial G_n}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi\frac{\partial f}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}\sigma$$

care este valabilă și pentru $\varphi \in C^2(G_n)$.

Dintre distribuțiile cu suportul concentrat pe o hipersuprafață din $\mathbb{R}^n$ ne interesează în special distribuția $\delta_r(\mathbf{x})$ definită prin egalitatea

$$\delta_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\delta(r - \|\mathbf{x}\|), \tag{2.72}$$

unde ω_n este aria sferei unitate din $\mathbb{R}^n$: $\omega_n = 2\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$. Prin definiție vom avea

$$\langle \delta_r(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x})\rangle = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\|\mathbf{x}\|=r}\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma_n = M_r^0[\varphi], \tag{2.73}$$

unde $M_r^{\mathbf{x}}[\varphi]$ este media sferică, pe sfera de rază r cu centrul în punctul $\mathbf{x}$, a funcției φ :

$$M_r^{\mathbf{x}}[\varphi] = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\|\mathbf{z}\|=r}\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{z})\,\mathrm{d}\sigma_n = \frac{1}{\omega_n}\int_{\|\mathbf{y}\|=1}\varphi(\mathbf{x}+r\mathbf{y})\,\mathrm{d}\omega_n, \tag{2.74}$$

$\mathrm{d}\sigma_n$ fiind elementul de arie de pe sfera de rază r din $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}\sigma_n = r^{n-1}\mathrm{d}\omega_n$, $\mathrm{d}\omega_n$ fiind elementul de unghi solid iar $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\|\mathbf{y}\| = 1$ descrie sfera unitate din $\mathbb{R}^n$, centrată în origine.

Pe de altă parte, se poate calcula convoluția $\delta_r(\mathbf{x}) * \varphi(\mathbf{x})$, pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ punînd, prin definiție,

$$\delta_r(\mathbf{x}) * \varphi(\mathbf{x}) = \langle \delta_r(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\|\mathbf{y}\|=r}\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} = M_r^{\mathbf{x}}[\varphi],$$

deoarece, prin definiție, media sferică este o funcție pară relativ la r. Așadar, pentru funcții φ din $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se poate defini media sferică a acestora și cu ajutorul convoluției

$$M_r^{\mathbf{x}}[\varphi(\mathbf{x})] = \delta_t(\mathbf{x}) * \varphi(\mathbf{x}). \tag{2.75}$$

Aceeași relație va fi utilizată pentru definirea mediei sferice a distribuțiilor

$$M_r^{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})] = \delta_r(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x}),\ f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{2.75'}$$

Justificarea definiției (2.75') se face imediat dacă ținem seama de faptul că există pentru orice distribuție $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ un șir (ψ_j) din $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ astfel încît $\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} f$, deci relația (2.75) fiind valabilă pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ va fi valabilă și la limită, deci pentru orice $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Deoarece pentru r fix distribuția $\delta_r(\mathbf{x})$ are suportul compact (situat pe sfera $\|\mathbf{x}\| = r$), transformata Fourier a acestei distribuții se poate calcula scriind

$$\hat{\delta}_r(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \delta(r - \|\mathbf{x}\|), e^{i(x,\xi)} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\|x\|=r} e^{i(x,\xi)} \, d\sigma_n = M_r^0 [e^{i(x,\xi)}].$$

După cum se verifică imediat, funcția $e^{i(x,\xi)}$, în care $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sînt considerați parametri, este o soluție a ecuației $\Delta_n u + \|\xi\|^2 u = 0$ media sferică, pe sfera de rază r, a oricărei soluții a acestei ecuații verifică relația

$$M_r^x[u(\mathbf{x})] = P_{\frac{n}{2}-1}(r\|\xi\|) u(\mathbf{x}), \qquad (2.74')$$

unde $P_\nu(z)$ este funcția Bessel normată corespunzătoare funcției Bessel de speța I, $J_\nu(z)$, adică (vezi cap. 13, vol. I)

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Gamma(\nu + 1) P_\nu(z).$$

Într-adevăr, deoarece, prin definiție,

$$M_r^x[\varphi(\mathbf{x})] = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|y\|=1} \varphi(\mathbf{x} + ry) d\omega_n, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

avem, cu $\xi = \mathbf{x} + ry \in \mathbb{R}^n$, $d\sigma_n = r^{n-1} d\omega_n$, $d\xi = dr\, d\sigma_n$, aplicînd formula flux-divergență

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|y\|=1} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi_j} y_j\right] d\omega_n = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\|\xi\|=r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma_n =$$

$$= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\|\xi\|<r} \Delta_n \varphi(\xi) \, d\xi = -\frac{a}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\|\xi\|<r} \varphi(\xi) \, d\xi,$$

ultima egalitate obținîndu-se în ipoteza că φ verifică ecuația Helmholtz, $\Delta_n \varphi + a\varphi = 0$; transcriind rezultatul obținut sub forma

$$r^{n-1} \frac{\partial M_r}{\partial r} = -a \int_0^r s^{n-1} M_s[\varphi] \, ds,$$

după o derivare în raport cu r, se deduce ecuația

$$\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} + a M_r = 0.$$

Această ecuație poate fi interpretată ca o ecuație diferențială în raport cu r și conform cu teoria funcțiilor Bessel, soluția generală va fi

$$M_r[\varphi] = [A J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{a}\, r) + B J_{-\frac{n}{2}+1}(\sqrt{a} r)] \cdot r^{\frac{n}{2}-1},$$

constantele de integrare determinîndu-se din condițiile inițiale

$$M_r[\varphi]_{r=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial M_r[\varphi]}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$$

care se deduc direct din definiția mediei sferice. Se găsește astfel exact egalitatea (2.74') (evident $\varphi = u$ și $a = \|\xi\|^2$), Va rezulta imediat egalitatea

$$\hat{\delta}_r(\mathbf{x}) = P_{\frac{n}{2}-1}(r\|\xi\|). \qquad (2.76)$$

Deoarece funcția Bessel normată $P_\nu(z)$ verifică ecuația diferențială

$$zW'' + (2\upsilon + 1) W' + z W = 0$$

funcția $P_{\frac{n}{2}-1}(r\|\xi\|)$ considerată ca funcție de r (iar $\|\xi\|$ este parametru) va verifica ecuația diferențială

$$W'' + \frac{n-1}{r} W' + \|\xi\|^2 W = 0, \qquad (2.77)$$

ceea ce face ca distribuția $\delta_r(\mathbf{x})$ să verifice ecuația cu derivate parțiale (deoarece $\widehat{\Delta_n u} = -\|\mathbf{x}\|^2 \hat{u}$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \Delta_n u = 0, \tag{2.78}$$

care coincide cu ecuația cu derivate parțiale a mediei sferice (sau *ecuația Euler-Poisson-Darboux*); pe de altă parte

$$P_{\frac{n}{2}-1}(0)=1, \quad P'_{\frac{n}{2}-1}(0) = 0$$

și deci distribuția $\delta_r(\mathbf{x})$ va verifica și condițiile inițiale

$$\delta_r(\mathbf{x})|_{r=0} = \delta(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial \delta_r(\mathbf{x})}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \tag{2.79}$$

Cu alte cuvinte, s-a demonstrat teorema următoare:

Teorema 2.3. *Distribuția $\delta_r(\mathbf{x})$ definită prin relația* (2.72) *verifică atît ecuația cu derivate parțiale* (2.78) *cît și condițiile inițiale* (2.79).

Ținînd seama de proprietățile convoluției distribuțiilor, va rezulta imediat, în baza definiției (2.75′), că media sferică a oricărei distribuții f (pentru r finit) verifică atît ecuația Euler-Poisson-Darboux (2.78) cît și condițiile inițiale

$$M_r^{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})]|_{r=0} = f(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial M_r^{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})]}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \tag{2.80}$$

Într-adevăr, deoarece avem verificată ecuația

$$\frac{\partial^2 \delta_r(\mathbf{x})}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\cdot\frac{\partial \delta_r(\mathbf{x})}{\partial r} - \Delta_n \delta_r(\mathbf{x}) = 0,$$

efectuînd convoluția cu distribuția f, deoarece $M_r^{\mathbf{x}}[f] = \delta_r(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x})$, rezultă că $M_r^{\mathbf{x}}[f]$ verifică de asemenea ecuația (2.78); în sfîrșit, din egalitățile (2.79) obținem

$$M_r^{\mathbf{x}}[f]|_{r=0} = \delta_r(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x})|_{r=0} = \delta_r(\mathbf{x})|_{r=0} * f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

$$\left.\frac{\partial M_r^{\mathbf{x}}[f]}{\partial r}\right|_{r=0} = \left.\frac{\partial}{\partial r}[\delta_r(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x})]\right|_{r=0} = \left.\frac{\partial \delta_r(\mathbf{x})}{\partial r}\right|_{r=0} * f(\mathbf{x}) = 0 * f = 0,$$

ceea ce justifică afirmațiile făcute.

Se poate arăta ușor că pentru media sferică a distribuției f este valabilă formula lui Pizetti; într-adevăr, din egalitatea (2.76) se obține egalitatea

$$\hat{\delta}_r(\mathbf{x}) \cdot \hat{f}(\xi) = P_{\frac{n}{2}-1}(r\|\xi\|)\hat{f}(\xi)$$

care conduce direct la formula lui Pizetti, dacă ținem seama de egalitățile:

$$\widehat{M_r^{\mathbf{x}}[f(x)]} = [\delta_r(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x})]\widehat{\ } = \hat{\delta}_r \cdot \hat{f},$$

$$P_{\frac{n}{2}-1}(r\|\xi\|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \left(\frac{r\|\xi\|}{2}\right)^{2k} \quad (\widehat{\Delta_n^k f} = (-1)^k \|\xi\|^{2k}\hat{f})$$

$$M_r^{\mathbf{x}}[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) r^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right) 2^{2k}} \Delta_n^k f(\mathbf{x}), \tag{2.81}$$

unde Δ_n^k, $k = 0,1,2,\ldots$, este iterata de ordin k a operatorului lui Laplace

$$\Delta_n^0 = 1, \ldots, \Delta_n^k = \Delta_n(\Delta_n^{k-1}), \quad k = 1,2,\ldots$$

Din formula (2.81) rezultă cîteva consecințe pentru distribuțiile f care verifică fie ecuația Laplace $\Delta_n f(\mathbf{x}) = 0$, fie o iterată a sa.

Astfel, dacă distribuția f este o distribuție armonică, adică dacă $f(\mathbf{x})$ verifică ecuația cu derivate parțiale $\Delta_n f(\mathbf{x}) = 0$, atunci, deoarece avem

$$\Delta_n^k f(\mathbf{x}) = 0, \qquad k = 2,3,\ldots,$$

din (2.81) rezultă că media sferică a acestei distribuții coincide cu $f(\mathbf{x})$ pentru orice r suficient de mic

$$M_r^{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})] = f(\mathbf{x}). \tag{2.82}$$

Reciproc, dacă relația (2.82) se verifică pentru o distribuție $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ și orice r suficient de mic, atunci f este o distribuție armonică; într-adevăr din (2.81) rezultă

$$M_r^x[f] - f = \frac{r^2}{n} \Delta_n f(\mathbf{x}) + 0\,(r^4),$$

ceea ce face să avem, în baza ipotezei (2.82),

$$\frac{1}{n} \Delta_n f(\mathbf{x}) + 0\,(r^2) = 0,$$

de unde pentru $r \to 0$ rezultă $\Delta_n f(\mathbf{x}) = 0$.

Dacă $f(\mathbf{x})$ verifică ecuația $\Delta_n^m f(\mathbf{x}) = 0$, atunci deoarece $\Delta_n^{m+p} f = 0$, $p = 1,2,\ldots$, relația (2.81) pentru aceste distribuții se reduce la egalitatea

$$M_r^x[f] = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) r^{2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right) 2^{2k}} \Delta_n^k f(\mathbf{x}). \tag{2.83}$$

Reciproc, aceeași demonstrație ca în cazul distribuțiilor armonice arată că orice distribuție f care verifică relația (2.83) pentru r suficient de mic va verifica și ecuația $\Delta_n^m f = 0$ (numită *ecuația poliarmonică de ordin m*).

Teorema 2.4. *Orice distribuție armonică (poliarmonică) este o funcție indefinit derivabilă.*

⌐ Este suficient să facem demonstrația în cazul funcțiilor poliarmonice ($m \geqslant 1$). Pentru aceasta, fie $a(\|\mathbf{x}\|) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ iar

$$\operatorname{supp} a(\|\mathbf{x}\|) \subset K, \quad K \subset \{\mathbf{x} \mid 0 < b_1 < \|\mathbf{x}\| < b_2\}$$

astfel încît să avem

$$A = \int_{b_1}^{b_2} a(r)\,dr \neq 0, \quad \int_{b_1}^{b_2} a(r) r^2\,dr = 0, \ldots, \int_{b_1}^{b_2} a(r) r^{2m-2}\,dr = 0. \tag{2.84}$$

Este evident că se poate determina oricînd o astfel de funcție $a(\|\mathbf{x}\|)$: de exemplu $a(r)$ poate fi o funcție test cu suportul în intervalul $[b_1, b_2]$ la care se adaugă funcția $\alpha_1 a_1(r) + \ldots + \alpha_{m-1} a_{m-1}(r)$, unde

$a_j(r) \in C_0^\infty(b_1 < r < b_2)$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, iar constantele α_j se determină în așa fel încît să se verifice condițiile (2.84).

Să introducem distribuția $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definită prin

$$g(\mathbf{x}) = \int_{b_1}^{b_2} a(r)\,\delta_r(\mathbf{x})\,dr; \tag{2.85}$$

această distribuție, prin definiție, acționează asupra elementului $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ conform cu relația

$$\langle g, \varphi \rangle = \left\langle \int_{b_1}^{b_2} a(r)\,\delta_r(\mathbf{x})\,dr,\ \varphi(\mathbf{x}) \right\rangle =$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} a(r) \langle \delta_r(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x}) \rangle\,dr = \int_{b_1}^{b_2} a(r)\,M_r^0[\varphi]\,dr.$$

Aici s-a utilizat formula (2.73); înlocuind media sferică, găsim în continuare:

$$\langle g, \varphi \rangle = \int_{b_1}^{b_2} a(r) \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\|\mathbf{x}\|=r} \varphi(\mathbf{x})\,d\sigma_n \right) = \int_{b_1}^{b_2} a^*(r)\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} =$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} a^*(\|\mathbf{x}\|)\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \langle a^*(\|\mathbf{x}\|), \varphi(\mathbf{x}) \rangle,$$

unde s-a notat

$$a^*(r) = a^*(\|\mathbf{x}\|) = \frac{a(r)}{\omega_n r^{n-1}},$$

este evident că funcția $a^*(r)$ are aceleași proprietăți ca și funcția $a(r)$: este indefinit derivabilă (deoarece $0 < b_1 < r < b_2$, deci $r \neq 0$) și are suportul concentrat în K. Din egalitatea

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle a^*(\|\mathbf{x}\|), \varphi(\mathbf{x}) \rangle$$

valabilă pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, rezultă că distribuția g introdusă prin relația (2.85) este egală, în sensul teoriei distribuțiilor, cu funcția indefinit derivabilă $a^*(\|\mathbf{x}\|)$.

Folosind proprietăţile convoluţiei, va rezulta că operaţia $g*f$ conduce la o funcţie indefinit derivabilă pentru orice distribuţie $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$; or vom putea scrie, în baza relaţiilor (2.75'), (2.82) şi (2.85) presupunînd distribuţia f poliarmonică:

$$g*f=\left(\int_{b_1}^{b_2}a(r)\,\delta_r(\mathbf{x})\,dr\right)*f(\mathbf{x})=\int_{b_1}^{b_2}a(r)\,[\delta_r(\mathbf{x})*f(\mathbf{x})]\,dr=$$

$$=\int_{b_1}^{b_2}a(r)\,M_r[f]\,dr=\int_{b_1}^{b_2}a(r)\left[\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)r^{2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)2^{2k}}\Delta_n^k f(\mathbf{x})\right]dr=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Delta_n^k f(\mathbf{x})}{k!\,2^{2k}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\int_{b_1}^{b_2}a(r)\,r^{2k}\,dr.$$

Ţinînd seama de relaţiile (2.84), din şirul anterior de egalităţi se deduce egalitatea $g*f=Af$ şi deci $f\in C^\infty$ în orice compact ce nu conţine originea; din consideraţiile de mai sus, însă, rezultă că proprietatea $f\in C^\infty$ în orice compact din $\mathbb{R}^n$ poate fi demonstrată în acelaşi mod: va fi suficient ca în locul funcţiei $a(r)$ să considerăm o funcţie de forma $r^q\,a(r)$ cu $q\geqslant n-1$, care să aibă aceleaşi proprietăţi ca şi $a(r)$. ⌟

2.4.4.2. *Operatori diferenţiali generalizaţi de ordinul întîi.* Vom considera distribuţia

$$\mathrm{L}_\lambda(x,a)=\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\,e^{ax}=\Phi_\lambda(x)\,e^{ax},\qquad(2.84)$$

unde $\Phi_\lambda(x)$, conform cu 2.4.4.1, este distribuţia $\dfrac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ iar λ şi a sînt constante; vom presupune a real şi λ complex. Pentru distribuţia (2.84) vom demonstra teorema următoare:

Teorema 2.5. *Distribuţia* $\mathrm{L}_\lambda(x,a)$ *este o funcţie olomorfă pentru orice* λ *complex; pentru* $\lambda=-k$, $k=0,1,2,\ldots$, *suportul acestei distribuţii este concentrat în origine şi sînt valabile egalităţile*

$$\mathrm{L}_{-k}(x,a)=\left(\frac{d}{dx}-a\right)^k\delta(x),\quad k=0,1,2,\ldots,\qquad(2.85)$$

iar pentru orice numere complexe λ *şi* μ *astfel încît* $\lambda+\mu\neq 0,-1,-2,\ldots$, *este valabilă formula*

$$\mathrm{L}_\lambda(x,a)*\mathrm{L}_\mu(x,b)=\mathrm{L}_{\lambda+\mu}(x,b)\,{}_1F_1(\lambda;\lambda+\mu;(a-b)x),\qquad(2.86)$$

unde ${}_1F_1(\alpha;\beta;z)$ *este seria hipergeometrică degenerată*

$${}_1F_1(\alpha;\beta;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}z^n.\qquad(2.87)$$

⌜ Scriind funcţionala corespunzătoare distribuţiei (2.84), găsim egalitatea

$$\langle\mathrm{L}_\lambda(x,a),\varphi(x)\rangle=\langle\Phi_\lambda(x),\ \psi(x)\rangle,$$

unde $\psi(x)=\varphi(x)\,e^{ax}\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ dacă $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$; rezultă că şi distribuţia $\mathrm{L}_\lambda(x,a)$ este olomorfă acolo unde $\Phi_\lambda(x)$ este olomorfă, adică pentru orice λ; dacă $\lambda=-k$, $k=0,1,2,\ldots$, aceeaşi teoremă 2.2 conduce la expresiile

$$\langle\mathrm{L}_{-k}(x,a),\varphi(x)\rangle=\langle\Phi_{-k}(x),\ \psi(x)\rangle=(-1)^k\,\psi^{(k)}(0)\qquad(2.88)$$

şi pentru a găsi efectiv pe $\mathrm{L}_{-k}(x,a)$ va trebui să-l exprimăm prin $\varphi(x)$ şi derivatele sale calculate în origine. Or

$$\psi^{(k)}(0)=\frac{d^k}{dx^k}[\varphi(x)\,e^{ax}]_{x=0}=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\,a^{k-j}\,\varphi^{(j)}(0),$$

unde C_k^j sînt coeficienţi binomiali. Deoarece

$$\varphi^{(j)}(0)=(-1)^j\langle\delta^{(j)}(x),\varphi(x)\rangle,$$

găsim

$$\psi^{(k)}(0)=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}C_k^j(-a)^{k-j}\langle\delta^{(j)}(x),\ \varphi(x)\rangle=$$

$$=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}C_k^j(-a)^{k-j}\langle\delta^{(j)}(x),\varphi(x)\rangle;$$

cum

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^k \delta(x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-a)^{k-j} \delta^{(j)}(x),$$

revenind la egalitatea (2.88), găsim imediat egalitatea

$$\langle \mathrm{L}_{-k}(x, a), \varphi(x)\rangle = \left\langle \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^k \delta(x), \quad \varphi(x)\right\rangle, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

care coincide cu (2.85).

Evident prin $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^k$ se înțelege iterata de ordin k a operatorului diferențial $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a$, adică

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^0 = 1, \ldots, \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^k = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^{k-1}.$$

Pentru a demonstra egalitatea (2.86) vom presupune inițial că $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$ și $\mathrm{Re}\ \mu > 0$, ceea ce face ca distribuțiile $\mathrm{L}_\lambda(x, a)$ și $\mathrm{L}_\mu(x, b)$ să fie regulate; deoarece suporturile acestor distribuții sînt concentrate pe semiaxa $x > 0$, putem scrie

$$\mathrm{L}_\lambda(x, a) * \mathrm{L}_\mu(x, b) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)} \int_0^x t^{\lambda-1} \mathrm{e}^{at} (x - t)^{\mu-1} \mathrm{e}^{b(x-t)}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{bx} x^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)} \int_0^1 t^{\lambda-1} (1 - t)^{\mu-1} \mathrm{e}^{(a-b)tx}\, \mathrm{d}t,$$

dacă efectuăm substituția $t \to xt$. Or se știe că este valabilă egalitatea (vezi cap. 12, vol. I)

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - t)^{\beta-\alpha-1} \mathrm{e}^{zt}\, \mathrm{d}t = B(\alpha, \beta - \alpha)\ {}_1F_1(\alpha;\ \beta;\ z),$$

unde $B(\alpha, \beta - \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)}$; făcînd identificările, se obține exact relația (2.86) în ipoteza $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$, $\mathrm{Re}\ \mu > 0$ (membrul

al doilea este nul pentru $x < 0$ pentru că și membrul întîi este nul pentru aceleași valori ale lui x). Pentru celelalte valori ale lui λ și μ relația (2.86) rămîne valabilă, în baza principiului permanenței relațiilor analitice, pentru acele valori λ și μ pentru care ambii membri sînt funcții diferențiabile în $\mathbb{C}$; or membrul întîi este funcție întreagă de λ și μ iar membrul al doilea este funcție olomorfă numai dacă $\lambda + \mu \neq 0, -1, -2, \ldots$ ⌟

Se poate face observația că dacă $\lambda + \mu = -k$, atunci seria hipergeometrică degenerată ${}_1F_1(\lambda;\ \lambda + \mu;\ z)$ rămîne olomorfă dacă $\lambda = -k_1$, unde k_1 este un număr întreg negativ strict mai mare decît k; dar în acest caz seria hipergeometrică degenerată degenerează într-un polinom de grad k_1 (polinoamele lui Laguerre).

În particular, dacă $a = b$, egalitatea (2.86) se transformă într-o relație mai simplă

$$\mathrm{L}_\lambda(x; a) * \mathrm{L}_\mu(x; a) = \mathrm{L}_{\lambda+\mu}(x; a). \tag{2.89}$$

De asemenea, ținînd seama de comutativitatea convoluției ($\mathrm{L}_\mu * \mathrm{L}_\lambda = \mathrm{L}_\mu * \mathrm{L}_\lambda$), se obține următoarea egalitate, valabilă pentru seria hipergeometrică degenerată

$${}_1F_1(\lambda; \lambda + \mu; (a - b)x) = \mathrm{e}^{(a-b)x}\ {}_1F_1(\mu;\ \lambda + \mu;\ (b - a)x)$$

care este cunoscută pentru $a - b = 1$, sub numele de identitatea lui Kummer (vezi cap. 12, vol. I).

Fie $y(x)$ o distribuție din $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ aleasă astfel încît să aibă sens convoluția $\mathrm{L}_\lambda(x; a) * y(x)$ [de exemplu $y(x)$ poate să aibă suportul concentrat în semiaxa $x \geqslant 0$] și să notăm pentru orice număr complex λ:

$$y_{-\lambda}(x, a) = \mathrm{L}_\lambda(x, a) * y(x). \tag{2.90}$$

Prin aceasta s-a definit un operator într-un subspațiu al lui $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ și cu valori în $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ care în particular conține atît operatorul diferențial $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a$ cît și toate iteratele sale; într-adevăr, ținînd seama de formula (2.85), dacă în (2.90) se face $\lambda = -k$, obținem șirul de egalități

$$y_k(x, a) = \mathrm{L}_{-k}(x, a) * y(x) = \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^k \delta(x)\right] * y(x) =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)[\delta(x) * y(x)] = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^k y(x)$$

care justifică afirmația făcută.

Dacă convenim să notăm $\mathscr{E}(x, a; \lambda)$ soluția elementară a operatorului (2.90), adică pentru distribuția $\mathscr{E}(x, a; \lambda)$ este valabilă egalitatea

$$\mathscr{E}_\lambda(x, a; \lambda) = \mathrm{L}_\lambda(x, a) * \mathscr{E}(x, a; \lambda) = \delta(x),$$

atunci se poate scrie

$$\mathscr{E}(x, a; \lambda) = \mathrm{L}_{-\lambda}(x, a); \tag{2.91}$$

într-adevăr, vom avea

$$\mathscr{E}_{-\lambda}(x, a; \lambda) = \mathrm{L}_\lambda(x, a) * \mathrm{L}_{-\lambda}(x, a) = \mathrm{L}_{\lambda-\lambda}(x, a) = \mathrm{L}_0(x, a) = \delta(x).$$

Aici s-a utilizat egalitatea (2.89) pentru $\mu = -\lambda$ precum și relația (2.85) pentru $k = 0$. Conform cu teoria soluției elementare, va rezulta că soluția ecuației

$$y_\lambda(x, a) = f(x) \tag{2.92}$$

este dată de convoluția

$$y(x) = \mathrm{L}_{-\lambda}(x, a) * f(x) \tag{2.93}$$

pentru toți $f(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ pentru care această convoluție există. Or, comparînd (2.90) cu (2.93), putem scrie $y(x) = f_\lambda(x, a)$, ceea ce face ca pentru a se obține soluția ecuației (2.92) să fie suficient să inversăm semnul lui λ și să punem $f(x)$ în loc de $y(x)$; deci

$$y_{-\lambda}(x, a) = f(x) \Leftrightarrow f_\lambda(x, a) = y(x).$$

Putem deci spune că relația (2.90) conține în ea atît operatorii y_{-k} cît și soluțiile corespunzătoare. Deoarece pentru $\lambda = -k$ ecuația (2.92) coincide cu ecuația

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^k y(x) = f(x), \tag{2.94}$$

putem spune că relația (2.92) generalizează la valori oarecare ale lui k (numere complexe) această ecuație; deci cu ajutorul teoriei distribuțiilor se poate extinde noțiunea de iterată a operatorului diferențial $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a$ la valori oarecare ale lui k, exact așa cum funcția $\Gamma(x)$

poate fi socotită ca fiind generalizarea funcției factorial la valori complexe:

$$\Gamma(z + 1) = z!.$$

Cu această convenție, vom putea scrie în locul relației (2.90) egalitatea

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^\lambda y(x) = \mathrm{L}_{-\lambda}(a, x) * y(x) \tag{2.90'}$$

și deci soluția ecuației generalizate

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^\lambda y(x) = f(x)$$

este dată de

$$y(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^{-\lambda} f(x).$$

În particular pentru $\lambda = k$, prin $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^{-k}$ trebuie să înțelegem distribuția $\mathrm{L}_k(x, a)$ care este regulată; așadar, soluția ecuației (2.94) va fi

$$y(x) = \mathrm{L}_k(x, a) * f(x) = \int_0^x \frac{(x - t)^{k-1}}{(k - 1)!} f(t)\mathrm{d}t$$

dacă $\operatorname{supp} f \subset [0, +\infty[$ iar f este o distribuție regulată. Se verifică ușor că unele proprietăți ale iteratelor operatorului diferențial $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a$ se extind și la iteratele de un ordin oarecare λ ale aceluiași operator; astfel, de exemplu, este valabilă egalitatea

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^\lambda \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^\mu y\right] = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)^{\lambda+\mu} y$$

după cum rezultă din relația (2.89) deoarece membrul întîi al acestei egalități se scrie și sub forma

$$\mathrm{L}_{-\lambda}(x, a) * [\mathrm{L}_{-\mu}(x, a) * y(x)] =$$

$$= [\mathrm{L}_{-\lambda}(x, a) * \mathrm{L}_{-\mu}(x, a)] * y(x) = \mathrm{L}_{-\lambda-\mu}(x, a) * y$$

și deci va coincide cu membrul al doilea al relației anterioare.

Dacă facem $a = 0$, se obține $L_\lambda(x, 0) = \Phi_\lambda(x)$ și conform cu rezultatele anterioare operația

$$g_{-\lambda}(x) = \Phi_{-\lambda}(x) * g(x)$$

va coincide de iterata de ordin λ (număr complex) a derivatei $\frac{d}{dx}$ (sau altfel zis, va coincide cu derivata de ordin complex arbitrar λ) a distribuției $g(x)$ (cu proprietăți convenabile). Notînd $\frac{d^\lambda g}{dx^\lambda} = g_{-\lambda}(x)$, se pot demonstra ușor formulele

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(\frac{d^\beta g}{dx^\beta}\right) = \frac{d^{\alpha+\beta} g}{dx^{\alpha+\beta}}, \quad \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} H(x) =$$

$$= \frac{x_+^{-\lambda}}{\Gamma(-\lambda+1)}, \quad \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}[\delta^{(k)}(x)] = \frac{x_+^{-k-\lambda-1}}{\Gamma(-k-\lambda)}.$$

După cum este cunoscut, derivatele de ordin oarecare λ sînt importante în teoria ecuațiilor diferențiale, prin aceea că uneori, deși soluțiile unor ecuații diferențiale nu sînt exprimabile prin cvadraturi, acestea pot fi exprimate cu ajutorul derivatelor de un ordin oarecare ale funcțiilor elementare.

Acest lucru se întîmplă, în particular, în teoria funcțiilor Bessel, a seriei hipergeometrice sau a seriei hipergeometrice degenerate, care conform cu egalitatea (2.86) se exprimă cu ajutorul distribuției (2.84).

Rezultatele care generalizează noțiunea de iterată a operatorului diferențial de ordinul întîi $\frac{d}{dx} - a$ se pot extinde și la operatori diferențiali de un ordin oarecare cu coeficienți constanți.

2.4.4.3. *Soluția elementară a ecuației undelor.* Vom reveni la considerațiile făcute la punctul 2.4.4.1 relative la distribuția $\delta_r(\mathbf{x})$, definită prin egalitatea (2.72) și la media sferică a distribuțiilor.

Vom scrie problema Cauchy

$$u(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{2.95}$$

pentru ecuația Euler-Poisson-Barboux (2.78)

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = 0, \tag{2.96}$$

și prin definiție soluția elementară a problemei Cauchy (2.95) pentru ecuația (2.96) va fi distribuția $\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ care depinde de parametrul real $t \geqslant 0$ și care verifică următoarele condiții :

a) pentru $t > 0$ verifică ecuația (2.96) ;

b) pentru $t = 0$ verifică condițiile Cauchy

$$\mathscr{E}_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \left.\frac{\partial \mathscr{E}_t}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Conform cu relațiile (2.78) și (2.76) putem spune că soluția elementară a problemei Cauchy (2.95) pentru ecuația (2.96) este distribuția $\delta_t(\mathbf{x})$; conform cu rezultatul demonstrat în 2.4.4.1 soluția problemei Cauchy (2.95) cu f distribuția arbitrară este dată de media sferică a acestei distribuții

$$M_t^{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})] = \delta_t(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x}). \tag{2.97}$$

Acum vom arăta că distribuția $\delta_t(\mathbf{x})$, soluția elementară a problemei Cauchy (2.95) pentru ecuația (2.96), este strîns legată și de soluția elementară a problemei Cauchy

$$u|_{t=0} = f(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(\mathbf{x}) \tag{2.98}$$

pentru ecuația undelor din $\mathbb{R}^n$

$$\Box_n u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_n u. \tag{2.99}$$

După cum știm, soluția elementară a problemei Cauchy (2.98) pentru ecuația undelor va fi distribuția $\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ care depinde de parametrul real nenegativ t și care verifică următoarele condiții :

a) pentru $t > 0$, $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$ verifică ecuația $\Box_n u = 0$;

b) pentru $t = 0$, $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$ verifică datele inițiale

$$\mathscr{E}_t(\mathbf{x})|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \mathscr{E}_t(\mathbf{x})}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(\mathbf{x}).$$

Din compararea definiţiilor anterioare, rezultă că condiţiile b) din ambele definiţii sînt diferite; aceasta se explică prin faptul că în cazul Euler-Poisson-Darboux $t = 0$ este o varietate singulară, ceea ce nu se întîmplă în cazul ecuaţiei undelor; pe de altă parte, dacă condiţiile (2.98) se dau arbitrar, rezultă o soluţie pentru ecuaţia (2.99), ceea ce nu se întîmplă în cazul ecuaţiei (2.96) şi al condiţiilor (2.95); pentru a se determina o soluţie a ecuaţiei (2.96) care verifică datele Cauchy (2.98) trebuie ca între f şi g să existe anumite relaţii de compatibilitate.

Pentru a găsi soluţia elementară a problemei Cauchy pentru ecuaţia Euler-Poisson-Darboux, vom transforma ecuaţia (2.96), ţinînd seama că al doilea termen $\frac{n-1}{t}\frac{\partial u}{\partial t}$ indică trecerea de la variabila t la variabila t^2; vom avea relaţiile

$$\frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial u}{\partial (t^2)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 2t\frac{\partial u}{\partial (t^2)}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial (t^2)} = \tag{2.100}$$

$$= 4t^2\left[\frac{\partial}{\partial (t^2)}\right]^2 u + 2\frac{\partial u}{\partial (t^2)}.$$

Efectuînd în ecuaţia (2.96) schimbarea de funcţie $u = t^{2-n}\, v$, se obţine ecuaţia

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (3-n)\frac{1}{t}\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta_n v = 0,$$

care, cu ajutorul relaţiilor (2.100), se scrie astfel (notînd $t^2 = r$):

$$4r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2(4-n)\frac{\partial v}{\partial r} - \Delta_n v = 0. \tag{2.101}$$

Tot cu ajutorul relaţiilor (2.100) ecuaţia undelor se poate scrie sub forma

$$4r\frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} + 2\frac{\partial u}{\partial r} - \Delta_n u = 0 \tag{2.99'}$$

iar dacă se derivează ecuaţia (2.101) de k ori în raport cu r, se obţine ecuaţia

$$4r\frac{\partial^{k+2} v}{\partial r^{k+2}} + 2(2k-n+4)\frac{\partial^{k+1} v}{\partial r^{k+1}} - \Delta_n\left(\frac{\partial^k v}{\partial r^k}\right) = 0$$

care va coincide cu ecuaţia (2.99') dacă se ia $k = \frac{n-3}{2} = m-1$ (în ipoteza $n = 2m+1$); cu această determinare pentru k va rezulta egalitatea

$$u = C\frac{\partial^{m-1} v}{\partial r^{m-1}},$$

unde C este o constantă care va fi determinată ulterior; înlocuind soluţia v a ecuaţiei (2.101) prin $t^{-2+n}\,\delta_t(\mathbf{x}) = t^{-1+2m}\delta_t(\mathbf{x})$, găsim pentru ecuaţia undelor soluţia următoare:

$$u(t, \mathbf{x}) = C\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}[t^{2m-1}\,\delta_t(\mathbf{x})] = C_1\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left[\frac{\delta(t-\|\mathbf{x}\|)}{t}\right]$$

deoarece

$$\delta_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n t^{n-1}}\,\delta(t-\|\mathbf{x}\|) = \frac{1}{\omega_n}\,t^{-2m}\,\delta(t-\|\mathbf{x}\|),$$

unde $C_1 = \frac{C}{\omega_n}$.

Teorema 2.6. *Soluţia elementară a problemei Cauchy* (2.98) *pentru ecuaţia undelor este dată de*

$$\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega_n}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left[\frac{\delta(t-\|\mathbf{x}\|)}{t}\right] \tag{2.102}$$

dacă numărul dimensiunilor spaţiale este impar ($n = 2m+1$).

⌐ În baza rezultatelor precedente, ştim sigur că membrul al doilea din (2.102) este o soluţie a ecuaţiei undelor pentru $t > 0$. Să stabilim care sînt condiţiile iniţiale verificate de această distribuţie; pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ vom scrie funcţionala corespunzătoare, dacă ţinem seama de faptul că t este considerat parametru; ţinînd seama de (2.73), găsim

$$\langle \delta(t-\varphi\|\mathbf{x}\|),\, \varphi(\mathbf{x})\rangle = \omega_n\, t^{n-1}\, M_t^0[\varphi(\mathbf{x})]$$

şi deoarece din formula lui Pizetti scrisă pentru primul termen al dezvoltării rezultă

$$M_t^0[\varphi(\mathbf{x})] = \varphi(0) + t^2\,\psi(\mathbf{x}),$$

se obține egalitatea

$$\langle \mathscr{E}_t(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x})\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}[t^{2m-1}\varphi(0) + t^{2m+1}\psi(\mathbf{x})],$$

de unde, deoarece

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1} t^{2m-1} = \left(m-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\,t = \frac{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t,$$

cum $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, obținem următoarea evaluare pentru funcționala $\langle \mathscr{E}_t(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x})\rangle$:

$$\langle \mathscr{E}_t(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x})\rangle = t\varphi(0) + O(t^3),$$

de unde rezultă

$$\langle \mathscr{E}_t(\mathbf{x})|_{t=0},\ \varphi(\mathbf{x})\rangle = 0,$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathscr{E}_t(\mathbf{x})}{\partial t}\bigg|_{t=0},\ \varphi(\mathbf{x})\right\rangle = \varphi(0) = \langle \delta(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x})\rangle. \qquad \lrcorner$$

Dacă se aplică transformarea Fourier în raport cu variabilele $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ecuației undelor (2.99) și condițiilor b) de la definiția lui $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$, va rezulta că transformata Fourier în raport cu $\mathbf{x}$ a soluției elementare $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$ verifică ecuația diferențială

$$\frac{\partial^2 \mathscr{F}_{\mathbf{x}}(\mathscr{E}_t)}{\partial t^2} + \|\xi\|^2 \mathscr{F}_{\mathbf{x}}(\mathscr{E}_t) = 0, \tag{2.104}$$

precum și condițiile inițiale

$$\mathscr{F}_{\mathbf{x}}(\mathscr{E}_t)|_{t=0} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}_{\mathbf{x}}(\mathscr{E}_t)|_{t=0} = 1. \tag{2.105}$$

Integrînd ecuația (2.104) în condițiile (2.105), găsim soluția

$$\mathscr{F}_{\mathbf{x}}(\mathscr{E}_t(\mathbf{x}))(\xi) = \frac{\sin(\|\xi\|\,t)}{\|\xi\|}$$

și conform cu teorema 2.6 vom avea egalitatea

$$\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\sin(\|\xi\|\,t)}{\|\xi\|}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\omega_n\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left(\frac{\delta(t-\|\mathbf{x}\|)}{t}\right), \tag{2.105'}$$

dacă $n = 2m+1$, $m = 1, 2, \ldots$

Cu ajutorul soluției elementare a problemei Cauchy pentru ecuația undelor se poate determina și soluția elementară a operatorului $\square_n u$, fiind valabilă teorema următoare:

Teorema 2.7. *Soluția elementară $\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x})$ a operatorului $\square_n u$, $n = 2m+1$ este*

$$\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x}) = H(t)\,\mathscr{E}_t(\mathbf{x}), \tag{2.106}$$

unde $H(t)$ este funcția unitate în raport cu variabila t, $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$ este dat de (2.103) *iar $\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x})$ acționează asupra funcției $\varphi(t, \mathbf{x}) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ conform cu egalitatea*

$$\langle \mathscr{E}_n(t, \mathbf{x}),\ \varphi(t, \mathbf{x})\rangle = \tag{2.107}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\omega_n\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left[\frac{1}{t}\,\delta(t-\|\mathbf{x}\|)\right],\ \varphi(t,\ \mathbf{x})\right\rangle dt$$

⌜ Aplicînd ecuației

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}_n}{\partial t^2} - \Delta_n \mathscr{E}_n = \delta(t, \mathbf{x})$$

transformarea Fourier în raport cu variabilele $\mathbf{x}$, deoarece $\delta(t, \mathbf{x}) = \delta(t) \times \delta(\mathbf{x})$, rezultă că distribuția $\mathscr{F}_{\mathbf{x}}(\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x}))$ verifică ecuația diferențială

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}_{\mathbf{x}}(\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x})) + \|\xi\|^2 \mathscr{F}_{\mathbf{x}}(\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x})) = 1(\xi) \times \delta(t) \tag{2.108}$$

de unde se deduce, deoarece membrul al doilea nu depinde de ξ, că distribuția $\mathscr{F}_{\mathbf{x}}(\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x}))$ este soluția elementară a acestei ecuații. Această soluție elementară este egală cu $H(t)\,Z(t)$, unde $Z(t)$ este soluția ecuației

$$Z'' + \|\xi\|^2 Z = 0,$$

care verifică datele Cauchy $Z(0) = 0$, $Z'(0) = 1$; rezultă

$$Z(t) = \frac{\sin(\|\xi\| t)}{\|\xi\|}.$$

Aşadar, avem egalitatea

$$\mathscr{F}_x(\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x}))(\xi) = H(t)\frac{\sin(\|\xi\| t)}{\|\xi\|},$$

de unde prin aplicarea transformatei Fourier inverse găsim, utilizînd (2.105'),

$$\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x}) = H(t)\mathscr{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\sin(\|\xi\| t)}{\|\xi\|}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\, H(t)}{2\omega_n \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left(\frac{\delta(t - \|\mathbf{x}\|)}{t}\right).$$

Justificarea relaţiei (2.107) rezultă din faptul că $H(t)\dfrac{\sin(\|\xi\| t)}{\|\xi\|}$ este o distribuţie regulată în $\mathscr{Z}'(\mathbb{R}^{n+1})$ şi din definiţia transformatei Fourier a distribuţiilor se deduce

$$\langle \mathscr{E}_n(t, \mathbf{x}),\ \varphi(t, \mathbf{x})\rangle = (2\pi)^{-n}\langle \mathscr{F}_x(\mathscr{E}_n),\ \mathscr{F}_x(\varphi)\rangle =$$

$$= (2\pi)^{-n}\left\langle H(t)\frac{\sin(\|\xi\| t)}{\|\xi\|},\ \mathscr{F}_x(\varphi(t, \mathbf{x}))\right\rangle =$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin(\|\xi\| t)}{\|\xi\|}\mathscr{F}_x(\varphi(t, \mathbf{x}))(\xi)\, d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_0^\infty \left\langle \frac{\sin(\|\xi\| t)}{\|\xi\|},\ \mathscr{F}_x(\varphi)\right\rangle =$$

$$= \int_0^\infty \left\langle \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{(\sin(\|\xi\| t)}{\|x\|}\right),\ \varphi(t, \mathbf{x})\right\rangle dt =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\omega_n \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left(\frac{\delta(t - \|\mathbf{x}\|)}{t}\right),\ \varphi(t, \mathbf{x})\right\rangle dt. \quad \square$$

Prin urmare, soluţia ecuaţiei undelor

$$\square_n u = F(t, \mathbf{x}), \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

care verifică datele Cauchy (2.98) în care $F(t, \mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})$ şi $g(\mathbf{x})$ sînt distribuţii alese astfel încît convoluţiile în care apar ele au sens, va fi dată de următoarea relaţie:

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 [f(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x})]) + \mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 [g(\mathbf{x}) - g_0(\mathbf{x})] +$$

$$+ \mathscr{E}_n(t, \mathbf{x}) * F(t, \mathbf{x}), \tag{2.109}$$

în care

$$f_0(\mathbf{x}) = \mathscr{E}_n(t, \mathbf{x}) * F(t, \mathbf{x})|_{t=0},$$

$$g_0(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t}[\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x}) * F(t, \mathbf{x})]|_{t=0},$$

iar $\mathscr{E}_t(\mathbf{x})$ şi $\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x})$ sînt daţi de (2.103) şi (2.106). Într-adevăr conform cu teoria generală, expresia $\mathscr{E}_n(t, \mathbf{x}) * F(t, \mathbf{x}) = u_p(t, \mathbf{x})$ reprezintă o soluţie particulară a ecuaţiei $\square_n u = F$ şi deci, făcînd schimbarea de funcţie $u \to u_0$, unde

$$u(t, \mathbf{x}) = u_0(t, \mathbf{x}) + u_p(t, \mathbf{x}), \tag{2.110}$$

vom avea

$$F = \square_n u = \square_n(u_0 + u_p) = \square_n u_0 + \square_n u_p = F + \square_n u_0$$

şi deci $u_0(t, \mathbf{x})$ va fi o soluţie a ecuaţiei omogene $\square_n u = 0$, care verifică condiţiile Cauchy

$$u_0|_{t=0} = f(\mathbf{x}) - u_p(t, \mathbf{x})|_{t=0} = f(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x}),$$

$$\left.\frac{\partial u_p}{\partial t}\right|_{t=0} = g(\mathbf{x}) - \left.\frac{\partial u_p}{\partial t}\right|_{t=0} = g(\mathbf{x}) - g_0(\mathbf{x})$$

care se obţin din (2.110). Or soluţia problemei Cauchy.

$$u_1|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u_p}{\partial t}\right|_{t=0} = g(\mathbf{x}) - g_0(\mathbf{x})$$

pentru ecuația $\square_n u_1 = 0$ este dată de convoluția $\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) * (g - g_0)$ în baza definiției soluției elementare a problemei Cauchy deci pentru a justifica complet relația (2.109) mai trebuie să arătăm că soluția problemei Cauchy

$$u_2|_{t=0} = f(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

pentru aceeași ecuație ($\square_n u_2 = 0$) este dată de

$$u_2(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 [f(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x})]).$$

Într-adevăr, scriind

$$u_2 = \frac{\partial u_3}{\partial t}, \quad u_3 = \mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 [f(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x})],$$

dacă se calculează $\square_n u_2$, se obține $\square_n u_2 = 0$ (permutabilitatea operațiilor $\square_n$ și $\frac{\partial}{\partial t}$ fiind o consecință a faptului că acești operatori au coeficienții constanți); apoi avem:

$$u_2|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_3}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 [f(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x})])|_{t=0} = f(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x}),$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\right|_{t=0} = (\Delta_n u_3)|_{t=0} = \Delta_n(u_3|_{t=0}) = \Delta_n 0 = 0.$$

În acest mod formula (2.109) este complet justificată, deoarece $u_0(t, \mathbf{x})$ din relația (2.110) este dată de suma $u_1 + u_2$.

În particular, dacă F, f și g sînt distribuții regulate, soluția (2.109) conduce la soluția problemei Cauchy restrînse, relativă la hiperplanul $t = 0$ pentru ecuația undelor din $\mathbb{R}^n$, în cazul $n = 2m + 1$, $m = 0,1,2, \ldots$, care va fi obținută explicit în cap. 5.

2.4.4.4. *Soluția elementară pentru ecuația Laplace și iteratele ei.* Vom considera inițial distribuția $\|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}$, unde $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ iar λ este un parametru complex, și vom arăta că aceasta are proprietăți asemănătoare cu distribuția $x_+^{\lambda-1}$ din 2.4.4.1 (la care dealtfel se reduce dacă $n = 1$ și dacă pentru $x_1 < 0$ dăm funcției obținute valoarea zero).

Vom presupune inițial Re $\lambda > 0$, ceea ce face ca distribuția $\|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}$ să devină o distribuție regulată iar funcționala corespunzătoare se va exprima cu ajutorul integralelor; vom avea deci egalitățile

$$\langle \|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}, \varphi(\mathbf{x})\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|^{\lambda-n} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_0^\infty r^{\lambda-1}\, dr \int_{\Sigma_n} \varphi(r\mathbf{y})\, d\omega_n =$$

$$= \langle x_+^{\lambda-1}, \psi(x)\rangle \tag{2.111}$$

cu notația

$$\psi(x) = \int_{\Sigma_n} \varphi(x\, \mathbf{y})\, d\omega_n = \omega_n M_x^0[\varphi], \tag{2.112}$$

unde Σ_n este sfera unitate din $\mathbb{R}^n$ iar $M_x^0[\varphi]$ este, ca de obicei, media sferică pe sfera de rază x cu centrul în origine a funcției φ; în obținerea șirului de egalități (2.111) s-a utilizat faptul că $d\mathbf{x} = r^{n-1} dr\, d\omega_n$, $r = \|\mathbf{x}\|$, iar $d\omega_n$ este elementul de arie pe sfera unitate Σ_n.

Deoarece $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, pentru $\|\mathbf{x}\|$ suficient de mare, suportul funcției φ va fi complet interior sferei de rază $\|\mathbf{x}\|$ și deci pe această sferă φ fiind nul și media sferică va fi nulă; așadar, ψ definit prin (2.112) este o funcție cu suport compact și evident indefinit derivabilă, deoarece media sferică are aceeași clasă ca și funcția a cărei medie este căutată.

Așadar, funcționala $\langle x_+^{\lambda-1}, \psi(x)\rangle$ are proprietățile distribuției $x_+^{\lambda-1}$ demonstrate în 2.4.4.1., iar în baza egalității

$$\langle \|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}, \varphi\rangle = \langle x_+^{\lambda-1}, \psi\rangle$$

aceste proprietăți se transmit distribuției $\|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}$. Așadar, funcționala $\langle \|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}, \varphi\rangle$ este o funcție meromorfă de λ în planul complex $\mathbb{C}$ avînd poli simpli pentru $\lambda = 0, -1, -2, \ldots$, reziduul pentru $\lambda = -k$ fiind egal cu

$$\frac{(-1)^k}{k!}\psi^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k \omega_n}{k!} \cdot \left.\frac{\partial^k M_x^0[\varphi]}{\partial x^k}\right|_{x=0};$$

or din formula lui Pizetti rezultă că derivatele de ordin impar ale mediei sferice sînt nule în origine, ceea ce are drept consecință faptul că polii pentru $\lambda = -1, -3, \ldots$ dispar (deoarece polii în cauză sînt simpli și au reziduurile nule) și, prin urmare, singurii poli ai funcțio-

nalei $\langle \|\mathbf{x}\|^{\lambda-1}, \varphi(\mathbf{x})\rangle$ sînt situaţi în pnnctele $\lambda = 0, -2, -4, \ldots$, reziduul ei pentru $\lambda = -2k$ fiind egal cu

$$\frac{(-1)^{2k}\omega_n}{(2k)!}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k)!\,\Delta_n^k\varphi(0)}{2^{2k}k!\,\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)},$$

deoarece tot formula lui Pizetti arată că este valabilă egalitatea

$$\frac{\partial^{2k}M_x^0[\varphi]}{\partial x^{2k}}\bigg|_{x=0} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k)!}{2^{2k}k!\,\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)}\,\Delta_n^k\varphi(0)$$

şi deci putem scrie relaţia

$$\operatorname*{Rez}_{\lambda=-2k}\langle \|\mathbf{x}\|^{\lambda-n},\ \varphi\rangle = \frac{\omega_n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{k!\,2^{2k}\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)}\,\Delta_n^k\varphi(0)$$

şi deoarece

$$\Delta_n^k\varphi(0) = \langle \delta(\mathbf{x}),\ \Delta_n^k\varphi(\mathbf{x})\rangle = \langle \Delta_n^k\delta(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x})\rangle,$$

rezultă următoarea expresie pentru reziduul distribuţiei $\|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}$ în punctul $\lambda = -2k$:

$$\operatorname*{Rez}_{\lambda=-2k}\|\mathbf{x}\|^{\lambda-n} = \frac{\omega_n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{2k}k!\,\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)}\,\Delta_n^k\varphi(\mathbf{x}),\quad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.113}$$

Aşadar, putem considera ca fiind demonstrată teorema următoare:

Teorema 2.8. *Considerată ca funcţie de* λ, *distribuţia* $\|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}$ *este o funcţie meromorfă în planul complex* $\mathbb{C}$, *avînd poli simpli pentru* $\lambda = 0, -2, -4, \ldots$ *cu reziduurile date de* (2.113).

Distribuţia normată $\dfrac{\|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ corespunzătoare distribuţiei $\|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}$ va fi o funcţie olomorfă de λ deoarece funcţia $\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ are poli simpli pentru $\lambda = 0, -2, -4, \ldots$ (cu reziduurile egale cu $\dfrac{(-1)^k}{k!}$ pentru $\lambda = 2k$). Aşadar, se poate enunţa teorema următoare:

Teorema 2.9. *Distribuţia*

$$R_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \tag{2.114}$$

este o funcţie întreagă de λ; *pentru* $\lambda = -2k$, $k = 0,1,2,\ldots$, *suportul acestei distribuţii este concentrat în origine, fiind valabile relaţiile*

$$R_{-2k}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^k\,\omega_n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{2k}\,\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)}\,\Delta_n^k\varphi(\mathbf{x}). \tag{2.115}$$

Teorema 2.10. *Este valabilă relaţia*

$$\hat{R}_\lambda(\xi) = 2^\lambda\pi^{\frac{n}{2}}\,R_{n-\lambda}(\xi). \tag{2.116}$$

⌜ Să presupunem iniţial $Re\ \lambda > 0$, ceea ce face ca distribuţia $R_\lambda(\mathbf{x})$ să fie o distribuţie regulată; în acest caz se poate scrie transformata sa Fourier sub formă integrală:

$$[\hat{R}_\lambda(\mathbf{x})](\xi) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}\|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}\,e^{i(\mathbf{x},\xi)}\,d(\mathbf{x}) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\int_0^\infty r^{\lambda-1}\,dr\int_{\Sigma_n}e^{i(r\mathbf{y},\xi)}\,d\omega_n =$$

$$= \frac{\omega_n}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\int_0^\infty r^{\lambda-1}M_r^0[e^{i(\mathbf{x},\xi)}]\,dr,\ \mathbf{y}\in\Sigma_n.$$

Or, cum din (2.74') avem $M_r^0[e^{i(x,\xi)}] = P_{\frac{n}{2}-1}(r\|\xi\|)$, putem scrie egalitatea

$$\hat{R}_\lambda(\xi) = \frac{\omega_n}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \int_0^\infty r^{\lambda-1} P_{\frac{n}{2}-1}(r\|\xi\|)dr,$$

de unde, cu ajutorul transformării $r\|\xi\| \to r$ rezultă

$$\hat{R}_\lambda(\xi) = C(n, \lambda)\ \|\xi\|^{-\lambda}, C(n,\lambda) = \frac{\omega_n}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \int_0^\infty r^{\lambda-1} P_{\frac{n}{2}-1}(r)dr. \quad (2.117)$$

Pentru a demonstra teorema, mai rămîne de arătat că $C(n, \lambda) = \frac{2^\lambda \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{2}\right)}$; pentru aceasta vom scrie egalitatea (2.117) cu ajutorul definiției transformatei Fourier în $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$: pentru orice $\varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ trebuie să avem egalitatea

$$\langle \hat{R}_\lambda, \varphi\rangle = \langle R_\lambda, \hat{\varphi}\rangle.$$

În particular, egalitatea rămîne valabilă dacă $\varphi(\mathbf{x}) = \exp(-\|\mathbf{x}\|^2)$; cum $\hat{\varphi} = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4}}$ egalitatea anterioară devine, dacă ținem seama de (2.117),

$$C(n, \lambda)\langle \|\xi\|^{-\lambda}, e^{-\|\xi\|^2}\rangle = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \left\langle \|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}, e^{-\frac{\|x\|^2}{4}}\right\rangle.$$

Or din egalitatea

$$\langle \|\mathbf{x}\|^\alpha, e^{-\beta\|x\|^2}\rangle = \omega_n \beta^{-\frac{\alpha+n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{2}\right), \quad \beta > 0,$$

[care se obține imediat utilizînd definiția funcției $\Gamma(z)$], găsim valoarea dorită pentru $C(n, \lambda)$; deoarece pentru celelalte valori ale lui λ se obține aceeași egalitate în baza principiului permanenței relațiilor analitice, funcțiile de λ, $R_\lambda(\mathbf{x})$ și $R_{n-\lambda}(\mathbf{x})$ fiind olomorfe pentru orice λ conform cu teorema 2.9. ⌟

Cu aceste pregătiri se poate determina ușor soluția elementară pentru iteratele operatorului lui Laplace.

Teorema 2.11. *Soluția elementară $\mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x})$ a operatorului Δ_n^k este*

$$\mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\Gamma(k)\,\pi^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - k\right) \|\mathbf{x}\|^{2k-n} \quad (2.118)$$

dacă $n - 2k \neq 0, -2, -4, -5, \ldots$

⌜ Deoarece distribuția $\mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x})$ verifică ecuația

$$\Delta_n^k \mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}),$$

prin aplicarea transformării Fourier se obține ecuația

$$(-1)^k \|\xi\|^{2k} \hat{\mathscr{E}}_{n,k}(\xi) = 1, \quad (2.119)$$

care arată că în baza lui (2.114) avem egalitatea

$$\mathscr{E}_{n,k}(\xi) = \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - k\right)} \hat{R}_{2k}(\xi).$$

Aplicînd transformata Fourier inversă, conform cu teorema 2.10 găsim exact (2.118), unde trebuie ca membrul al doilea să fie finit, deci $\frac{n}{2} - k \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$ ⌟

În particular, dacă $k = 1$ și $n > 2$, adică în cazul operatorului Laplace Δ_n, $n > 2$, soluția elementară $\mathscr{E}_n(\mathbf{x})$ va fi egală cu expresia cunoscută (vezi exemplul 7)

$$\mathscr{E}_n(\mathbf{x}) = -\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{2^2 \pi^{\frac{n}{2}}} \|\mathbf{x}\|^{2-n} =$$

$$= -\frac{\left(\frac{n}{2} - 1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{2\left(\frac{n}{2} - 1\right)2\pi^{\frac{n}{2}}} \|\mathbf{x}\|^{2-n} = -\frac{\|\mathbf{x}\|^{2-n}}{(n-2)\,\omega_n},$$

De asemenea, dacă n este impar, soluția elementară (2.118) este totdeauna valabilă.

Cazurile excluse din considerațiile anterioare pot fi și ele tratate cu ajutorul distribuției $\|\mathbf{x}\|^\lambda$, λ fiind un număr complex. Utilizînd teorema 2.8 (în care în loc de $\lambda - 2$ se scrie λ), va rezulta că distribuția $\|\mathbf{x}\|^\lambda$ este o funcție meromorfă de λ, avînd poli simpli în punctele $\lambda = -n,\ -n\ -2,\ -n\ -4,\ \ldots$ Presupunînd că $\lambda = -2k$ este un pol al acestei funcții, deci dezvoltarea Laurent va avea forma (cu ξ în loc de $\mathbf{x}$):

$$\|\xi\|^\lambda = \frac{a_{-1}}{\lambda + 2k} + a_0 + (\lambda + 2k)f, \tag{2.120}$$

unde a_{-1}, a_0 a și f sînt distribuții; înmulțind ultima egalitate cu $\|\xi\|^{2k}$ și făcînd $\lambda \to -2k$, găsim

$$1 = \lim \frac{a_{-1}\|\xi\|^{2k}}{\lambda + 2k} + a_0\|\xi\|^{2k}$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{\lambda \to 2k} a_{-1}\|\xi\|^{2k} = 0$, deoarece în caz contrar egalitatea anterioară nu este posibilă ($a_0\|\xi\|^{2k}$ n-ar fi finit). Rezultă că soluția ecuației (2.119) se va scrie, în acest caz sub forma

$$\hat{\mathscr{E}}_{n,k}(\xi) = (-1)^k a_0,$$

unde a_0 este determinat prin dezvoltarea (2.120) și deci va rezulta

$$a_0 = \lim_{\lambda \to -2k} \frac{\partial}{\partial \lambda}[(\lambda + 2k)\|\xi\|^\lambda].$$

Ținînd seama că transformarea Fourier este o transformare continuă, găsim următoarea expresie pentru $\mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x})$:

$$\mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x}) = (-1)^k \mathscr{F}^{-1}[a_0] = (-1)^k \lim_{\lambda \to -2k} \frac{\partial}{\partial \lambda}[(\lambda + 2k)\mathscr{F}^{-1}(\|\xi\|^\lambda)] =$$

$$= (-1)^k \lim_{\lambda \to -2k} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{(\lambda + 2k)\,\Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right)2^\lambda}{\pi^{n/2}\,\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\|\mathbf{x}\|^{-\lambda - n}\right].$$

În orice caz, este vizibil că pentru $\mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x})$ se obține o expresie de forma

$$\mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x}) = C_1\|\mathbf{x}\|^{-n+2k} + C_2\|\mathbf{x}\|^{-n+2k}\ln(\|\mathbf{x}\|)$$

cu C_1 și C_2 constante; însă, deoarece este valabilă egalitatea

$$\Delta_n(\|\mathbf{x}\|^\alpha) = \alpha(\alpha + n - 2)\|\mathbf{x}\|^{\alpha - 2},$$

se obține imediat concluzia că pentru operatorul Δ_n^k funcția $\|\mathbf{x}\|^{2k-n}$ este o soluție ordinară, ceea ce face ca soluția elementară să se reducă la cel de-al doilea termen

$$\mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x}) = C_2\|\mathbf{x}\|^{2k-n}\ln(\|\mathbf{x}\|), \tag{2.121}$$

unde

$$C_2 = (-1)^k \lim_{\lambda \to -2k} \frac{2^\lambda(\lambda + 2k)\,\Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right)}{\pi^{n/2}\,\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \neq 0,$$

deoarece este exact cazul în care funcția $\Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right)\Big|_{\lambda = -2k} = \Gamma\left(\frac{n - 2k}{2}\right)$ are un pol.

Așadar, reunind rezultatele obținute pînă acum privitoare la soluția elementară a operatorilor poliarmonici, putem enunța teorema următoare:

Teorema 2.12. *Soluția elementară a operatorului poliarmonic* Δ_n^k *se exprimă fie prin* (2.118), *fie prin* (2.121).

În încheiere, se poate face observația că în cazul operatorilor poliarmonici se poate transpune toată teoria expusă în 2.4.4.2, înlocuindu-se distribuția $L_\lambda(x, a)$ prin distribuția $R_\lambda(\mathbf{x})$, rolul operatorului $\frac{d}{dx} - a$ fiind luat de operatorul lui Laplace; într-adevăr, din relația (2.115) rezultă

$$R_{-2}(\mathbf{x}) = -\frac{\omega_n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{4\,\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}\Delta_n\delta(\mathbf{x}) = A\Delta_n\delta(\mathbf{x})$$

(A fiind o constantă), tot așa cum din relația (2.85) rezultă

$$L_{-1}(x, a) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right) \delta(x).$$

Pentru a se putea face analogia cu 2.4.4.2 va trebui arătat că și pentru distribuția $R_\lambda(\mathbf{x})$ se poate defini o relație de forma (4.86). Or, deoarece $(R_\lambda * R_\mu) = \hat{R}_\lambda \cdot \hat{R}_\mu$, utilizînd egalitățile (2.116) și (2.114), găsim imediat egalitatea

$$R_\lambda(x) * R_\mu(x) = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\lambda-\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)} R_{\lambda+\mu}(\mathbf{x})$$

valabilă pentru toți λ și μ pentru care membrul al doilea este diferit de zero și finit. Pentru valorile de excepție pentru λ și μ va trebui să utilizăm în locul lui $R_\lambda(\mathbf{x})$ expresii de forma $R_\lambda(\mathbf{x}) \ln \|\mathbf{x}\|$.

Prin analogie cu relația (2.90), operatorul $u_\lambda(\mathbf{x})$ definit în $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ cu valori în $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ dat prin

$$u_\lambda(\mathbf{x}) = R_{-\lambda}(\mathbf{x}) * u(\mathbf{x}),$$

unde $u(\mathbf{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ este ales astfel încît convoluția $R_{-\lambda}(\mathbf{x}) * u(\mathbf{x})$ are sens, va juca în teoria operatorului lui Laplace și a iteratelor sale de un ordin complex λ același rol pe care-l joacă în teoria operatorului $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a$ și a iteratelor sale de ordin λ, operatorul (2.90).

Conform cu teoria generală a soluției elementare, dacă $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, atunci soluția particulară a ecuației

$$\Delta_n^k u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

se va scrie sub forma

$$u(\mathbf{x}) = \mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x}),$$

unde $\mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x})$ este dat fie de (2.118) fie de (2.121); condiția $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ să aibă suportul compact se impune deoarece este evident că $\mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x})$ nu are suportul compact. În particular, dacă $f(\mathbf{x})$ este o distribuție regulată iar $\operatorname{supp} f \subset G_n$, vom avea

$$u(\mathbf{x}) = \int_{G_n} \mathscr{E}_{n,k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} = A(n, k) \int_{G_n} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2k-n} f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}$$

în cazul formulei (2.118) sau

$$u(\mathbf{x}) = B(n, k) \int_{G_n} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2k-n} \ln(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}$$

în cazul (2.121).

2.4.4.5. *Undele plane și teoria distribuțiilor.* Fie $x \in \mathbb{R}^n$ și $\mathbf{y}$ un punct de pe sfera unitate, deci dacă $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, atunci $y_1^2 + \ldots + y_n^2 = \|\mathbf{y}\|^2 = 1$ și fie $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ produsul scalar al acestor vectori, de adică $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție de o clasă convenabilă, atunci funcția $g((\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ va fi o funcție de $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, constantă pe hiperplanele perpendiculare pe direcția $\mathbf{y}$, deoarece pe aceste hiperplane $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p$ (ecuația carteziană a acestor hiperplane este $x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n - p = 0$, $|p|$ ($p \in \mathbb{R}$) fiind distanța de la acest hiperplan la origine, ceea ce face ca pe aceste hiperplane $g((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = g(p)$.

Orice funcție g care este constantă pe anumite hiperplane poartă denumirea de *funcție de tipul undelor plane.*

Dacă lungimea vectorului $\mathbf{y}$ nu este egală cu unitatea (este egală cu $\|\mathbf{y}\|$), atunci se poate lua în considerație produsul scalar $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$ cu $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$ iar singura modificare va apărea în ecuația carteziană a hiperplanului perpendicular pe direcția $\mathbf{y}$, care va fi de forma $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\| \cdot p$, acest hiperplan fiind evident situat tot al distanța $|p|$ de origine.

Fie $B_r(0)$ interiorul sferei de rază r cu centrul în origine și să calculăm integrala funcției $f((\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ în interiorul acestei sfere; pentru,

aceasta se intersectează sfera B_r de ecuație carteziană $\|\mathbf{x}\|<r$ cu hiperplane perpendiculare pe direcția $\mathbf{y}$, deci cu hiperplane având ecuația $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|p$, pe care $g((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = g(\|\mathbf{y}\|p)$; această intersecție determină o nouă sferă $n-1$-dimensională având raza $\rho = (r^2 - p^2)^{1/2}$ și deci volumul ei va fi egal cu $\frac{\omega_{n-1}}{n-1}(r^2-p^2)^{\frac{n-1}{2}}$; vom putea deci scrie egalitățile

$$\int_{\|\mathbf{x}\|<r} g((\mathbf{x}, \mathbf{y}))\, d\mathbf{x} = \int_{-r}^{+r} g(\|\mathbf{y}\| \cdot p)\, dp \int_{B_\rho} d\mathbf{x}' =$$

$$= \frac{\omega_{n-1}}{n-1} \int_{-r}^{+r} (r^2 - p^2)^{\frac{n-1}{2}} g(\|\mathbf{y}\| \cdot p)\, dp, \qquad (2.122)$$

unde $d\mathbf{x}'$ este elementul de volum din $\mathbb{R}^{n-1}$. Deoarece $d\mathbf{x} = d\rho\, d\sigma_n$, vom putea scrie

$$\int_0^r \rho^{n-1} d\rho \int_{\|\mathbf{y}\|=\rho} g((\mathbf{x}, \mathbf{y}))\, d\sigma_n =$$

$$= \frac{\omega_{n-1}}{n-1} \int_{-r}^{-r} (r^2 - \rho^2)^{\frac{n-1}{2}} g(\|\mathbf{y}\|p)\, dp;$$

prin derivare în raport cu r și făcînd apoi $r = 1$, se obține egalitatea

$$\int_{\|\mathbf{x}\|=1} g((\mathbf{x}, \mathbf{y}))\, d\omega_n = \omega_{n-1} \int_{-1}^{+1} (1-p^2)^{\frac{n-3}{2}} g(\|\mathbf{y}\|p)\, dp, \qquad (2.122')$$

de unde rezultă că integrala pe sfera unitate a oricărei funcții de tipul undelor plane are simetrie sferică, adică este o funcție de $\|\mathbf{y}\|$

Deoarece variabilele $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ își pot schimba rolurile în produsul scalar $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, vom conveni să considerăm în egalitatea (2.122′) $\mathbf{x}$ parametru și variabil pe sferă și deci o vom transcrie sub forma

$$\int_{\|\mathbf{y}\|=1} g((\mathbf{x}, \mathbf{y}))\, d\omega_n = \omega_{n-1} \int_{-1}^{+1} (1-p^2)^{\frac{n-3}{2}} g(\|\mathbf{x}\|p)\, dp. \qquad (2.123)$$

În particular, dacă $g(t) = |t|^\lambda$, λ fiind o constantă complexă oarecare, din (2.123) se obține egalitatea

$$\int_{\|\mathbf{y}\|=1} |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^\lambda\, d\omega_n = \omega_{n-1}\|\mathbf{x}\|^\lambda \int_{-1}^{+1} (1-p^2)^{\frac{n-3}{2}} |p|^\lambda\, dp =$$

$$= 2\omega_{n-1}\|\mathbf{x}\|^\lambda \int_0^1 p^\lambda (1-p^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dp = \omega_{n-1}\|\mathbf{x}\|^\lambda \int_0^1 t^{\frac{\lambda-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-3}{2}}\, dt,$$

dacă se observă că integrandul este o funcție pară care se reduce ușor la funcția $B(p, q)$; ținînd seama de expresia lui ω_{n-1} $\left(= 2\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right)$, găsim următoarea egalitate importantă:

$$\int_{\|\mathbf{y}\|=1} |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\, d\omega_n = 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} \|\mathbf{x}\|^\lambda \qquad (2.124)$$

Dacă se utilizează notația (2.114), această egalitate se va scrie și sub forma

$$\int_{\|\mathbf{y}\|=1} |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^\lambda d\omega_n = 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) R_{\lambda+n}(\mathbf{x}). \qquad (2.125)$$

Această egalitate va fi valabilă pentru orice λ complex, dacă o scriem sub forma

$$\frac{1}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int_{\|y\|=1}|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^{\lambda}\,d\omega_n = R_{\lambda+n}(\mathbf{x}), \quad (2.125')$$

deoarece membrul al doilea al acestei egalități este o funcție analitică în λ. Relația (2.125) reprezintă formula de descompunere în unde plane a distribuției $R_\lambda(\mathbf{x})$. Înlocuind în (2.125) $\lambda + n$ din nou prin λ, vom obține

$$R_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda-n+1}{2}\right)}\int_{\|y\|=1}|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^{\lambda-n}d\omega_n; \quad (2.126)$$

deoarece din egalitatea (2.115) pentru $\lambda = 0$ se obține egalitatea

$$R_0(\mathbf{x}) = \omega_n\delta(\mathbf{x}),$$

relația (2.126) ne dă posibilitatea să exprimăm distribuția lui Dirac prin unde plane:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}\int_{\|y\|=1}|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^{\lambda-n}d\omega_n. \quad (2.127)$$

2.4.4.6. *Soluții elementare pentru ecuații cu derivate parțiale de tip eliptic cu coeficienți constanți.* Fie $P(D)$ un operator diferențial liniar de ordin par ($2m$) a cărui parte principală o vom nota cu $P_0(D)$. Dacă operatorul $P(D)$ este astfel încît $P_0(\xi) \neq 0$ pentru orice $\xi = (\xi_1, \ldots \ldots \xi_n)$, $\neq 0$, atunci acest operator se numește *eliptic*. Pentru a găsi soluția ecuației

$$P(D)\,E(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (2.128)$$

se poate utiliza teoria expusă în 2.4.4.5, mai precis se poate utiliza formula (2.126) care conduce la egalitatea (2.127) și deci vom înlocui ecuația (2.128) prin ecuația

$$P(D)\,u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\omega_n}R_\lambda(\mathbf{x}) \quad (2.129)$$

care se transformă în ecuația (2.128), dacă se face $\lambda = 0$. Membrul al doilea al acestei ecuații se va putea exprima cu ajutorul lui (2.126), ceea ce conduce la considerarea ecuației

$$P(D)\,v(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2\omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda-n+1}{2}\right)}|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^{\lambda-n}, \quad (2.130)$$

dacă $v(\mathbf{x},\mathbf{y}) = v((\mathbf{x},\mathbf{y}))$ este soluția acestei ecuații care depinde numai de produsul scalar $(\mathbf{x},\mathbf{x})$; este evident că soluția ecuației (2.129) se va exprima cu ajutorul egalității

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\|y\|=1} v((\mathbf{x},\mathbf{y}))\,d\omega_n \quad (2.131)$$

(deoarece dacă o ecuație cu derivate parțiale posedă o soluție care depinde de un număr de parametri, atunci integrînd această soluție în raport cu acești parametri se va obține din nou o soluție a aceleiași ecuații). Rămîne deci să găsim soluțiile care depind de produsul scalar $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ale ecuației (2.130). Notînd $v((\mathbf{x},\mathbf{y})) = v(t)$, deoarece $\frac{\partial}{\partial x_j} = y\frac{d}{dt}$, din (2.130) se obține ecuația diferențială de ordinul $2m$

$$P\left(\mathbf{y}\frac{d}{dt}\right)v(t) = \frac{|t|^{\lambda-n}}{2\omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda-n+1}{2}\right)} \quad (2.132)$$

ale cărei soluții depind de $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y)$, λ și t. Dacă $e(t)$ este soluția elementară a ecuației (2.132) (care se poate calcula ușor), soluția $v(t,\mathbf{y},\lambda)$ a ecuației (2.132) se va scrie sub forma

$$v(t,\mathbf{y},\lambda) = e(t) * \frac{|t|^{\lambda-n}}{2\omega_n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda-n+1}{2}\right)} \quad (2.133)$$

și deci, în baza egalității (2.131), soluția ecuației (2.129) va fi

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\|y\|=1} v((\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \mathbf{y},\lambda)\,d\omega_n. \quad (2.134)$$

Conform cu observațiile anterioare, soluția căutată se va obține înlocuind în formulele de mai sus $\lambda = 0$.

Deoarece distribuția $|t|^{\lambda-n}$ trebuie considerată în $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, proprietățile ei vor rezulta din rezultatele punctului 2.4.4.4 pentru $n = 1$; așadar, distribuția

$$R_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|^{\lambda-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \tag{2.135}$$

este o funcție întreagă de λ care pentru $\lambda = -2m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ are suportul concentrat în origine, fiind valabile egalitățile

$$R_{-2m}(x) = \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2m-1}\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} \frac{\mathrm{d}^{2m}\delta(x)}{\mathrm{d}x^{2m}}. \tag{2.135'}$$

Rezultă deci că expresia (2.133) ia o formă simplă dacă $n = 2m + 1$, deoarece pentru $\lambda = 0$, în baza lui (2.135) și (2.135'), vom avea

$$v(t, \mathbf{y}, 0) = e(t) * R_{-2m}(t) \frac{1}{2\omega_n \pi^{\frac{n-1}{2}}} \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} e(t) * \delta^{(2m)}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2m}} \frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}t^{2m}} e_{\mathbf{y}}(t)$$

[în realitate și $e(t)$ va depinde de $\mathbf{y}$]. Așadar, soluția elementară a ecuației (2.128) în cazul unui număr impar de variabile spațiale se va scrie sub forma

$$E(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \int_{\|\mathbf{y}\|=1} \frac{\mathrm{d}^{2m} e_{\mathbf{y}}(t)}{\mathrm{d}t^{2m}}\bigg|_{t=(\mathbf{x},\,\mathbf{y})} \mathrm{d}\omega_n.$$

Pentru $n = 2m$, soluția elementară va fi dată de (2.134) pentru $\lambda = 0$ în ipoteza că (2.133) definește o distribuție (adică în ipoteza că produsul de convoluție din membrul al doilea al acestei relații are sens).

2.4.5. Ecuația căldurii și operatorii diferențiali generalizați

Rezultatele obținute la punctul 2.4.4.2 se pot extinde și la ecuații cu derivate parțiale cu coeficienți constanți de forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) u + F(t, \mathbf{x})$$

sau la sisteme de ecuații cu derivate parțiale de această formă.

Vom lua în discuție doar cazul ecuației căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x) \tag{2.144}$$

căreia îi vom atașa condiția inițială

$$u(t, x)|_{t=0} = f(x), \tag{2.144'}$$

soluția corespunzătoare putîndu-se obține cu ajutorul soluției elementare

$$\mathscr{E}_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0. \tag{2.145}$$

Notînd prin L operatorul diferențial

$$\mathrm{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{2.146}$$

operatorul formal adjunct corespunzător va fi

$$\mathrm{L}^+ = -\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \tag{2.147}$$

iteratele acestor operatori vor fi

$$\mathrm{L}^0 = 1, \mathrm{L}^1 = \mathrm{L}, \ldots, \mathrm{L}^k = \mathrm{L}(\mathrm{L}^{k-1}), \quad k = 2, 3, \ldots,$$

unde, de exemplu

$$L^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial x^3} + \frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

$$L^3 = \frac{\partial^3}{\partial t^3} - 3\frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2} + 3\frac{\partial^5}{\partial t' x^4} - \frac{\partial^6}{\partial x^6}, \ldots$$

şi analog se obţin operatorii L^{+2}, L^{+3}, ...

Vom introduce distribuţia $E_\lambda(t, x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$, punînd

$$E_\lambda(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda)}\, t_+^{\lambda - \frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (2.148)$$

şi vom avea, în baza notaţiilor din 2.4.4.1,

$$E_\lambda(t, \lambda) = \Phi_\lambda(t)\mathscr{E}_t(x); \qquad (2.148')$$

funcţionala corespunzătoare acestei distribuţii, pentru $\operatorname{Re}\lambda > 0$, se scrie

$$\langle E_\lambda(t, x)\ \varphi(t, x)\rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} E(t, x)\ \varphi(t, x)\,dt\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\lambda(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}_t(x)\ \varphi(t, x)\ dx\right] dt.$$

Aşadar, pentru valorile parametrului complex λ, pentru care $\operatorname{Re}\lambda > 0$, se poate scrie

$$\langle E_\lambda(t, x),\ \varphi(t, x)\rangle = \langle \Phi_\lambda(t),\ \psi(t)\rangle \qquad (2.149)$$

în care s-a notat

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}_t(x)\varphi(t, x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\varphi(t, x)\,dx$$

cum φ este o funcţie test din $\mathbb{R}^2$, ψ va fi o funcţie test din $\mathbb{R}$ şi deci cu ajutorul egalităţii (2.149), în baza rezultatelor din 2.4.4.1 se pot obţine proprietăţi ale distribuţiei E_λ(egalitatea (2.149) rămîne evident valabilă pentru $\lambda \in \mathbb{C}$ deoarece Φ_λ este o funcţie întreagă în variabila λ).

Cum $\Phi_\lambda(t) = \delta^{(k)}(t)$ pentru $\lambda = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, se deduce

$$\langle E_\lambda|_{\lambda=-k},\ \varphi\rangle = \langle \Phi_\lambda|_{\lambda=-k},\ \psi\rangle = \langle \delta^{(k)}(t),\ \psi(t)\rangle =$$

$$= (-1)^k \psi^{(k)}(0) = (L^{+k}\varphi)\,(0,0)$$

[deoarece

$$\psi(0) = \langle \mathscr{E}_t(x),\ \varphi(t, x)\rangle|_{t=0} = \langle \delta(x),\ \varphi(0, x)\rangle = \varphi(0, 0);$$

apoi

$$\psi'(t) = \left\langle \frac{\partial \mathscr{E}_t}{\partial t},\ \varphi \right\rangle + \left\langle \mathscr{E}_t,\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathscr{E}_t}{\partial x^2},\ \varphi \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \mathscr{E}_t,\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \mathscr{E}_t,\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle + \left\langle \mathscr{E}_t,\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathscr{E}_t,\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle = \langle \mathscr{E}_t, -L^+\varphi\rangle$$

şi deci

$$\psi'(0) = -(L^+\varphi)\ (0, 0)$$

iar în general

$$\psi^{(k)}(t) = \langle \mathscr{E}_t,\ (-1)^k L^{+k}\varphi\rangle,$$

adică $\psi^{(k)}(0) = (-1)^k(L^{+k}\varphi)(0,0)$].

Putem scrie în continuare egalităţile

$$\langle E_\lambda|_{\lambda=-k},\ \varphi\rangle = \langle \delta(t, x),\ L^{+k}\varphi(t, x)\rangle = \langle L^k\delta(t, x),\ \varphi(t, x)\rangle$$

care arată că în sensul teoriei distribuţiilor avem

$$E_\lambda(t, x)|_{\lambda=-k} = L^k\delta(t, x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.150)$$

În plus, E_λ verifică și egalitatea

$$E_\lambda(t, x) * E_\mu(t, x) = E_{\lambda+\mu}(t, x) \tag{2.151}$$

pentru orice $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$; demonstrația va fi realizată pentru $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$ egalitatea (2.151) rămînînd valabilă și pentru $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, $\operatorname{Re}\mu \leqslant 0$ deoarece cei doi membri ai egalității (2.151) sînt funcții întregi în variabilele λ, μ, $\lambda + \mu$. Putem scrie

$$(E_\lambda * E_\mu)(t, x) = \iint_{\mathbb{R}^2} E_\lambda(t - s, x - y)\, E_\mu(s, y)\, ds\, dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \int_0^t (t - s)^{\lambda - \frac{3}{2}} ds \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x - y)^2}{4(t - s)} - \frac{y^2}{4s} \right] dy,$$

integrala în raport cu variabila y calculîndu-se imediat în baza identității

$$\frac{(x - y)^2}{4(t - s)} - \frac{y^2}{4s} = \frac{(yt - xs)^2}{4ts(t - s)} + \frac{x^2}{4t}$$

și deci cu schimbarea de variabilă $yt = xs + 2z\sqrt{ts(t - s)}$ $(y \leftrightarrow z)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x - y)^2}{4(t - s)} - \frac{y^2}{4s} \right] dy = \exp\left(-\frac{x^2}{4t} \right) 2\sqrt{\pi}\, t^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} (t - s)^{\frac{1}{2}}.$$

Deoarece

$$\int_0^t (t - s)^{\lambda - 1} s^{\mu - 1}\, ds = B(\mu, \lambda) = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda + \mu)},$$

se obține (2.151). În baza observației

$$L^k u(t, x) = L^k[\delta(t, x) * u(t, x)] = [L^k \delta(t, x)] * u(t, x) = E_{-k}(t, x)\, u(t, x)$$

vom defini iterata de ordinul $\lambda (\lambda \in \mathbb{C})$ a operatorului $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ punînd, prin definiție,

$$L^\lambda u(t, x) = E_{-\lambda}(t, x) * u(t, x)$$

(în ipoteza că u este astfel ales încît convoluția anterioară are sens). Din (2.151) rezultă că soluția elementară a ecuației

$$L^\lambda u(t, x) = F(t, x)$$

este egală cu

$$\mathscr{E}_\lambda(t, x) = L^{-\lambda}(t, x) = E_\lambda(t, x)$$

deoarece

$$L^\lambda \mathscr{E}_\lambda(t, x) = E_{-\lambda}(t, x) * \mathscr{E}_\lambda(t, x) = E_\lambda(t, x) * L^{-\lambda}(t, x) =$$

$$= E_{-\lambda}(t, x) * E_\lambda(t, x) = E_0(t, x) = \delta(t, x).$$

Prin urmare, distribuția $E_\lambda(t, x)$ dată prin (2.148) definește iteratele de orice ordin $\lambda \in \mathbb{C}$ pentru operatorul (2.146) cu observația că iterata de ordin $-\lambda$ este chiar soluția elementară a operatorului L^λ; cu alte cuvinte, în distribuția E_λ sînt înglobate iteratele de orice ordin ale operatorului definit de ecuația căldurii, soluția elementară corespunzătoare apărînd de asemenea ca o iterată a aceluiași operator.

Calcule complet analoage vor fi valabile și pentru operatorul L_n definit prin $L_n u = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u$, cînd

$$E_\lambda(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n \Gamma(\lambda)}\, t_+^{\lambda - \frac{n}{2} - 1} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t} \right),$$

ca și pentru operatorul $L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial x^3}$ cînd

$$E_\lambda(t, x) = \frac{1}{2\pi\Gamma(\lambda)}\, t_+^{\lambda - \frac{4}{3}} A_1\left(-xt^{-\frac{1}{3}} \right)$$

(vezi 2.4.3).

În cazul operatorului lui Laplace, utilizînd cele expuse în 2.4.4.4., cu ajutorul distribuției

$$R_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|^{\lambda-n}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$$

se pot obține aceleași rezultate ca și în cazul ecuației căldurii, definind iterata $\Delta_n^{\frac{\lambda}{2}}$ prin convoluția

$$\Delta_n^{\frac{\lambda}{2}} u(\mathbf{x}) = R_{-\lambda}(\mathbf{x}) * u(\mathbf{x}),$$

care, pentru $\lambda = 2k$, deoarece $R_{-2k}(\mathbf{x}) = c(n, k)\ \Delta_n^k \delta(\mathbf{x})$, se reduce (abstracție făcînd de un factor constant) la iterata naturală Δ_n^k.

Calculele anterioare se pot repeta, ținîndu-se seama și de identitatea

$$R_\lambda(\mathbf{x}) * R_\mu(\mathbf{x}) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\lambda-\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right)} R_{\lambda+\mu}(\mathbf{x})$$

care se deduce ușor cu ajutorul transformării Fourier.

Încheind aceste considerații relative la utilizarea teoriei distribuțiilor în integrarea ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații cu derivate parțiale, care reprezintă doar o mică secțiune din această teorie, vom face observația că, de regulă, s-a făcut apel la soluția elementară care apare ca o distribuție regulată în cazul ecuației Laplace și al ecuației căldurii și ca o distribuție singulară în cazul ecuației undelor.

Unul din rezultatele fundamentale ale teoriei distribuțiilor este acela care afirmă că orice ecuație

$$\mathrm{L}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$$

admite o soluție elementară în $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ (teorema Malgrange-Ehrenpreis) sau în $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ (teorema Hörmander-Lojasiewicz); în cele studiate anterior această soluție elementară a fost găsită efectiv în cazurile concrete care vor apărea în capitolele următoare.

CAPITOLUL III

Ecuații de tip eliptic

3.1 Definiții. Formule fundamentale

3.1.1. Operatori eliptici generali

Fie $\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})$ un operator diferențial liniar de ordin m cu coeficienți reali

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(\mathbf{x})\, \mathrm{D}^\alpha,\ m \geqslant 2; \tag{3.1}$$

forma caracteristică a acestui operator este forma de grad m dată de relația

$$Q(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(\mathbf{x})\, \xi^\alpha \tag{3.2}$$

iar operatorul (3.1) se spune că este de tip *eliptic* în domeniul Ω_n, în care sînt definiți coeficienții $a_\alpha(\mathbf{x})$, dacă forma caracteristică (3.2) este definită (adică are același semn) în orice punct $\mathbf{x} \in \Omega_n$.

O primă consecință a acestei definiții este faptul că ordinul operatorului (3.1) este un număr par, $m = 2m'$, $m' = 1,2,3,\ldots$; (dacă m este impar, vom avea $Q(\mathbf{x}, -\xi) = -Q(\mathbf{x}, \xi)$, adică dacă $Q(\mathbf{x}, \xi_0) > 0$, neapărat $Q(\mathbf{x}, -\xi_0) < 0$ și deci forma caracteristică (3.2) nu păstrează același semn în Ω_n. În plus, în baza continuității în raport cu ξ a polinomului $Q(\mathbf{x}, \xi)$, vor exista vectori $\xi_0 \neq 0$, astfel încît $Q(\mathbf{x}, \xi_0) = 0$.

De obicei, se normează operatorul (3.1) astfel încît dacă acesta este de tip eliptic în Ω_n, pentru orice $\xi \neq 0$ să avem

$$(-1)^{m'} Q(\mathbf{x}, \xi) = (-1)^{m'} \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(\mathbf{x}) \xi^\alpha > 0, \qquad m' = \frac{m}{2} \tag{3.2'}$$

pentru orice $\mathbf{x} \in \Omega_n$.

Dacă avem $a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|-m}(\Omega_n)$ pentru $|\alpha| \geqslant m'$, atunci în locul operatorului (3.1) se poate considera o formă echivalentă, numită *forma divergentă* a acestui operator, care se va scrie

$$L(x, D)\, u = \sum_{0 \leqslant |k|,\, |j| \leqslant m'} (-1)^{|k|} D^k (c_{jk}(x)\, D^j u) \tag{3.3}$$

iar $a_\alpha = c_{jk}$ dacă $|\alpha| = m = 2m'$, $|k| = |j| = m'$; se presupune $c_{jk} \in C^{|k|}(\Omega_n)$ iar trecerea de la forma (3.1) la forma (3.3) a operatorului (3.1) se face prin aplicarea convenabilă a formulei de derivare a unui produs.

Scrierea sub forma (3.3) a operatorului (3.1) are avantajul că forma operatorului formal adjunct a operatorului considerat este asemănătoare cu forma inițială (3.3); într-adevăr se verifică ușor egalitatea

$$L^+(x, D)\varphi = \sum_{0 \leqslant |j|,\, |k| \leqslant m'} (-1)^{|j|} D^j (c_{jk}(x)\, D^k \varphi) \tag{3.4}$$

iar forma caracteristică se va scrie

$$Q(x, \xi) = \sum_{|k| = |j| = m'} \xi^k c_{ik}(x)\, \xi^j \tag{3.5}$$

iar condiția de elipticitate va fi

$$Q(x, \xi) = \sum_{|k| = |j| = m'} \xi^k c_{jk}(x)\, \xi^j \neq 0,\ \xi^j \neq 0,\ x \in \Omega_k. \tag{3.2''}$$

Rezultatele viitoare însă nu vor fi demonstrate pentru operatorii eliptici (3.1) generali ci pentru o clasă mai restrînsă de operatori eliptici și anume pentru operatorii (3.1) *uniform eliptici*, adică pentru acei operatori (3.1) pentru care există constanta reală $c_0 > 0$ astfel încît

$$(-1)^{m'} \sum_{|j| = |k| = m'} \xi^k c_{jk}(x)\, \xi^j > c_0 \|\xi\|^m,\ x \in \Omega_n; \tag{3.6}$$

constanta c_0 se numește *modulul de elipticitate uniformă* a operatorului (3.1). Dacă operatorul $L(x, D)$ este doar eliptic, se poate scrie, în baza lui (3.2') o inegalitate de forma

$$(-1)^{m'} \sum_{|j| = |k| = m'} \xi^k c_{jk}(x)\, \xi^j \geqslant c(x)\, \|\xi\|^m,\ x \in \Omega_n, \qquad c(x) > 0,$$

și numai dacă funcția $c(x)$ admite o margine inferioară nenulă în Ω_n, operatorul L va fi uniform eliptic în Ω_n.

Trebuie făcută observația că definițiile anterioare nu se transpun direct în cazul în care coeficienții operatorului (3.1) sînt cu valori complexe (dar de argumente reale). În acest caz operatorul (3.1) se va numi *eliptic* dacă forma $|Q(x, \xi)|$ este pozitiv definită pentru orice $x \in \Omega_n$. În acest caz apar unele dificultăți și anume:

— S-ar putea întîmpla ca ordinul operatorului considerat să nu mai fie par, după cum ne putem convinge în cazul $n = 2$, în care vom considera operatorul lui Cauchy

$$L(z, D) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad z = x + iy,$$

în care $Q(x, \xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi + i\eta)$ și deci $Q(x, \xi, \eta) = \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + \eta^2} > 0$ dacă $\xi, \eta \neq 0$.

— Este posibil ca proprietăți esențiale ale ecuațiilor de tip eliptic, cum ar fi faptul că anularea unei soluții pe frontiera $\partial\Omega_n$ atrage anularea soluției și în interiorul domeniului Ω_n, să nu mai fie valabile în cazul în care coeficienții sînt cu valori complexe, după cum ne arată exemplul ecuației lui Bitzadze:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2i\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

unde $Q(x, \xi, \eta) = \xi^2 + 2i\xi\eta + \eta^2$ și $|Q|^2 = (\xi^2 + \eta^2)^2 + \xi^2\eta^2 > 0$ iar dacă Ω_2 este interiorul cercului unitate, atunci cu $z = x + iy$, soluția $u(z) = f(z)\,(1 - |z|^2)$ va fi nulă pe frontieră fără să fie identic nulă.

În aceste condiții se consideră operatorii *eliptici forte* (sau *tari eliptici*), care au proprietatea

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{|k| = |j| = m'} (-1)^{m'} \xi^k c_{jk}(x) \xi^j\right\} \geqslant c_0 \|\xi\|^m,\ x \in \Omega_n,$$

$c_0 > 0$ fiind o constantă sau dacă există o funcție $e(x)$ continuă și cu valori complexe (aleasă convenabil) astfel încît

$$\operatorname{Re} e(x)\left\{\sum_{|k| = |j| = m'} (-1)^{m'} \xi^k c_{jk}(x)\, \xi^j\right\} \geqslant c_0 \|\xi\|^m,\ c_0 > 0,\ x \in \Omega_n.$$

Se mai utilizează și noțiunea de *elipticitate proprie*: operatorul (3.1) avînd coeficienți cu valori complexe va fi eliptic propriu dacă $m = 2m'$ iar polinomul în λ, $Q(x, \xi + \lambda\eta)$ admite m' zerouri cu parte reală negativă și m' zerouri cu parte reală pozitivă, oricare ar fi ξ și η. Orice operator eliptic forte este și eliptic propriu, dar reciproca nu este valabilă, decît dacă $m = 2$.

De obicei, ecuațiile eliptice cu două variabile independente sînt acelea ale căror soluții au proprietăți care se abat de la regula generală. Conform cu considerațiile din cap. 4, vol. II, funcția $u \in L^2(\Omega_n)$ se va numi soluție slabă a ecuației de tip eliptic

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})\, u = f, \qquad f \in L^2(\Omega_n), \tag{3.7}$$

dacă pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_n)$ se verifică egalitatea

$$(\mathrm{L}^+\varphi, u) = (\varphi, f), \tag{3.8}$$

produsele scalare fiind calculate în $L^2(\Omega_n)$.

Dacă $f \in C^0(\Omega_n)$, vom spune că u este o *soluție ordinară* (*clasică*) a ecuației (3.7), dacă $u \in C^m(\Omega_n)$ și verifică această ecuație în orice punct $\mathbf{x} \in \Omega_n$.

Evident,, orice soluție ordinară (clasică) a ecuației (3.7) va fi o soluție slabă și invers; o soluție slabă a aceleiași ecuații de clasă $C^m(\Omega_n)$ va verifica ecuația (3.7) în orice punct din Ω_n (dacă $f \in C^0$) (după cum ne putem convinge imediat, efectuînd integrări prin părți în relația $(\mathrm{L}^+\varphi, u)$, obținîndu-se egalitatea $(\mathrm{L}^+\varphi, u) = (\varphi, \mathrm{L}u)$ și deci pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_n)$ vom avea $(\varphi, \mathrm{L}u - f) = 0$, ceea ce înseamnă $\mathrm{L}u = f$ dacă $\mathbf{x} \in \Omega_n$).

Prin *problemă Dirichlet interioară* (*clasică*) atașată ecuației (3.7) se înțelege determinarea acelei soluții ordinare u a ecuației care verifică condițiile la limită

$$\left.\frac{\partial^l u}{\partial \nu^l}\right|_{\partial\Omega_n} = g_l, \quad l = 0, 1, \ldots\ m' - 1, \tag{3.9}$$

unde ν este versorul normalei la frontiera domeniului Ω_n (notată de obicei prin $\partial\Omega_n$). Evident, se presupune $u \in C^{m'-1}(\bar{\Omega}_n)$ iar frontiera $\partial\Omega_n$ este de o clasă convenabilă, astfel încît derivatele $\dfrac{\partial^l u}{\partial \nu^l}$ să fie unic determinate pe $\partial\Omega_n$.

De regulă funcțiile $g_1, \ldots, g_{m'-1}$ din condițiile (3.9) se numesc *date Dirichlet* și se presupun de o clasă convenabilă pe $\partial\Omega_n$.

Fie $u_0 \in C^{m'-1}(\Omega_n)$ astfel încît u_0 să verifice condițiile la limită (3.9); din cauza liniarității acestor condiții, pentru funcția $u - u_0$ condițiile (3.9) vor fi evident nule și de aceea vom putea presupune $u - u_0 \in H_0^{m'-1}(\Omega_n)$. Se știe că dacă $u \in H_0^1(\Omega_n)$, avem $u|_{\partial\Omega_n} = 0$ dacă $u \in C^0(\Omega_n)$ iar $\partial\Omega_n \in C^1$ și, invers, orice funcție continuă din $H^1(\Omega_n)$ nulă pe $\partial\Omega_n$ va aparține și spațiului $H_0^1(\Omega_n)$.

Evident, aceste afirmații se extind și la spațiile $H^{m'}(\Omega_n)$, $m' > 1$, deci dacă $\partial\Omega_n$ este suficient de regulată (de exemplu de clasă $C^{m'}$) și dacă $v \in C^{m'-1}(\Omega_n)$, atunci $v \in \mathrm{H}_0^{m'}(\Omega_n)$ dacă și numai dacă $v \in H^{m'}(\Omega_n)$ iar $\mathrm{D}^\alpha v|_{\partial\Omega_n} = 0$, $|\alpha| \leqslant m' - 1$.

În acest mod, în baza acestor considerații se va putea defini problema Dirichlet (interioară) generalizată [sau problema Dirichlet (interioară) slabă] astfel:

Să se determine o soluție slabă u a ecuației (3.7) în care $f \in L^2(\Omega_n) = H^0(\Omega_n)$ astfel încît dîndu-se o funcție $u_0 \in H^m(\Omega_n)$, să avem $u - u_0 \in H_0^{m'}(\Omega_n)$.

3.1.2. Soluții slabe pentru ecuații liniare de tip eliptic de ordinul al doilea

În domeniul $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ vom considera funcțiile reale $a_{jk} = a_{kj}$, a_j și a, cu ajutorul cărora vom forma operatorul diferențial liniar de ordinul al doilea

$$\mathrm{L}(x, \mathrm{D})u = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(\mathbf{x})\, u, \tag{3.10}$$

care va fi de tip eliptic în Ω_n, în baza celor expuse în 3.1.1, dacă pentru orice $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$, real, forma pătratică $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\xi_j\xi_k$ este pozitivă pentru orice $\mathbf{x} \in \Omega_n$. Operatorul (3.10) va conduce la ecuația de tip eliptic de ordinul al doilea

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})\, u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tag{3.11}$$

unde f este o funcție convenabil definită în Ω_n.

Vom presupune $a_{jk} \in C^1(\Omega_n)$, a_j, $a \in C^0(\Omega_n)$ și notînd

$$a_j' = a_j - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k},$$

printr-o operație elementară ajungem la forma divergentă a operatorului (3.10) :

$$L(\mathbf{x}, D)u = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{jk}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] + \sum_{j=1}^{n} a'_j(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(\mathbf{x})u. \qquad (3.10')$$

Calculînd produsul scalar $(\varphi, L(\mathbf{x}, D)u)$, un calcul simplu conduce la egalitatea

$$(\varphi, Lu) = \int_{\Omega_n}\left[\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} a'_j(\mathbf{x})\,\varphi\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(\mathbf{x})\varphi u\right]d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_n}\varphi\frac{\partial u}{\partial \mu}\,d\sigma,$$

unde s-a notat

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\nu_j, \qquad (3.13)$$

$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ fiind versorul normalei exterioare la $\partial\Omega_n$. Cu notațiile

$$\mu'_k = \frac{1}{\|\mu\|}\sum_{j=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\nu_j,\ \|\mu\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\,\nu_j\right]^2,\quad \mathbf{x}\in\partial\Omega_n,$$

vom putea scrie $\frac{\partial}{\partial \mu} = \|\mu\|\frac{\partial}{\partial \mu'}$, $\mu' = (\mu'_1, \ldots, \mu'_n)$ și ajungem în mod natural la derivata după direcția μ [care va apărea în identitatea integrală (3.13)].

Direcția μ este strîns legată atît de operatorul L cît și de varietatea $\partial\Omega_n$ și se numește *direcția conormală* (sau *transversală*) atașată operatorului (3.10).

Cu ajutorul derivatei după direcția μ' se definește *problema Neumann (interioară) clasică*, ca fiind soluție ordinară a ecuației (3.11), de clasă $C^1(\Omega_n)$ care este astfel încît

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mu'}\right|_{\partial\Omega_n} = h,$$

h fiind o funcție cunoscută, definită pe $\partial\Omega_n$.

Vom nota prin $B(\varphi, \psi)$ funcționala definită prin

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_n}\left[\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a'_j(\mathbf{x})\,\varphi\frac{\partial \psi}{\partial x_j} + a(\mathbf{x})\varphi\psi\right]d\mathbf{x}, \qquad (3.14)$$

ceea ce face ca (3.12) să se transcrie

$$(\varphi, Lu) = B(\varphi, u) - \int_{\partial\Omega_n}\|\mu\|\,\varphi\frac{\partial u}{\partial \mu'}\,d\sigma. \qquad (3.12')$$

Dacă vom presupune φ funcție test în Ω_n [(adică $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_n)$] iar u soluție a ecuației (3.11), se obține egalitatea

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f) \qquad (3.15)$$

pe care o vom folosi pentru a defini, conform cu considerațiile din 3.1.1, soluțiile slabe ale problemei Dirichlet pentru ecuația (3.11).

— Prin soluție slabă a problemei Dirichlet $u|_{\partial\Omega_n} = g$, pentru ecuația (3.11) în care $f\in L^2(\Omega_n)$, se înțelege funcția $u\in H^1(\Omega_n)$ care verifică (3.15) pentru orice funcție test în Ω_n și care este astfel încît $u - u_0\in H_0^1(\Omega_n)$ [$u_0\in H^1(\Omega_n)$ fiind astfel încît $u|_{\partial\Omega_n} = g$].

Vom putea da și definiția soluției slabe a problemei Neumann pentru ecuația (3.11) cu date nule pe $\partial\Omega_n$, în modul următor :

— Prin soluție slabă a problemei Neumann $\left.\frac{\partial u}{\partial \mu'}\right|_{\partial\Omega_n} = 0$ pentru ecuația (3.11) [$f\in L^2(\Omega_n)$] se va înțelege funcția $u\in H^1(\Omega_n)$ care verifică relația (3.15) pentru orice funcție test în Ω_n.

Pentru a justifica această definiție, va trebui să arătăm că în baza ei, soluția slabă astfel obținută, în cazul în care $u\in C^2(\Omega_n)$, $f\in C^0(\Omega_n)$ va verifica ecuația (3.11) și condiția $\left.\frac{\partial u}{\partial \mu'}\right|_{\partial\Omega_n} = 0$. Or, dacă pentru orice $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_n)$ se verifică (3.15), în baza definiției lui $B(\varphi, \psi)$ și a faptului că $\varphi|_{\partial\Omega_n} = 0$, se obține egalitatea

$$\int_{\Omega_n}(Lu - f)\varphi\,d\mathbf{x} = 0$$

care înseamnă $Lu - f = 0$ în Ω_n. În acest caz, utilizînd egalitatea (3.12) în care $\varphi \in H^1(\Omega_n)$ este arbitrar, se va obține egalitatea

$$\int_{\partial\Omega_n} \varphi \frac{\partial u}{\partial \mu} \, d\sigma = 0$$

care înseamnă evident $\left.\frac{\partial u}{\partial \mu}\right|_{\partial\Omega_n} = 0.$

3.2. Soluții slabe pentru ecuații uniform eliptice de ordinul al doilea

3.2.1. Metoda proiecției ortogonale

Să considerăm ecuația $L(x, D)u = 0$, unde

$$L(x, D)u = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + a(x)\, u, \tag{3.16}$$

în care vom presupune $a(x) \geqslant \alpha_0 > 0$, $x \in \Omega_n$. Egalitatea (3.12) se va transcrie

$$(\varphi, Lu) = \int_{\Omega_n} \left[\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + a\varphi u\right] dx - \int_{\partial\Omega_n} \varphi \frac{\partial u}{\partial \mu} \, d\sigma.$$

Să notăm $[\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega_n)]$

$$(\varphi, \psi)_L = \int_{\Omega_n} \left(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + a\varphi\psi\right) dx. \tag{3.17}$$

Din (3.12′) va rezulta egalitatea

$$(\varphi, \psi)_L = (\varphi, L\psi) + \int_{\partial\Omega_n} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \, d\sigma \tag{3.18}$$

și deci dacă $\psi = u$ este soluție a ecuației $Lu = 0$ iar $\varphi \in C^\infty(\Omega_n)$, vom avea verificată egalitatea *

$$(\varphi, u_L) = 0 \tag{3.19}$$

Expresia (3.17) va defini în $H^1(\Omega_n)$ un produs scalar dacă operatorul L este uniform eliptic, deoarece se verifică imediat că

$$(\varphi_1 + \varphi_2, \psi)_L = (\varphi_1, \psi)_L + (\varphi_2, \psi)_L,$$
$$(\lambda\varphi, \psi)_L = \lambda(\varphi, \psi)_L,$$

λ fiind scalar, $(\varphi, \psi)_L = (\psi, \varphi)_L$, iar deoarece

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqslant c_0 \|\xi\|^2, \qquad x \in \Omega_n,$$

vom avea

$$(\varphi, \varphi)_L = \int_{\Omega_n} \left(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a\varphi^2\right) dx \geqslant$$

$$\geqslant c_0 \int_{\Omega_n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2\right] dx + a_0 \int_{\Omega_n} \varphi^2 \, dx \geqslant b_0 \|\varphi\|_1^2,$$

unde $b_0 = \min\{c_0, a_0\}$ iar

$$\|\varphi\|_1^2 = \int_{\Omega_n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 + \varphi^2\right] dx.$$

În plus, cu $A = \max_{x \in \Omega_n} \{|a_{jk}|, |a|\}$, deoarece $2ab \leqslant a^2 + b^2$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$,

$$(\varphi, \varphi)_L \leqslant A \int_{\Omega_n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right|\right)^2 + \varphi^2\right] dx =$$

$$= A \int_{\Omega_n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 + \varphi^2 + 2\left(\sum_{j \neq k} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right|\right)\right] dx \leqslant$$

$$\leqslant pA \int_{\Omega_n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 + \varphi^2\right] dx = b_1 \|\varphi\|_1^2$$

*) Evident, prin trecere la limită, datorită continuității produsului scalar, relația (3.19) va fi verificată și pentru orice $\varphi \in H_0^1(\Omega_n)$.

și deci sînt valabile inegalitățile

$$b_0\|\varphi\|_1^2 \leqslant (\varphi,\ \varphi)_L \leqslant b_1\|\varphi\|^2,$$

care arată că normele $\|\varphi\|_1$ și $\|\varphi\|_L = \sqrt{(\varphi, \varphi)_L}$ sînt echivalente.

De aceea vom presupune în continuare că în locul spațiului $H^1(\Omega_n)$ în care norma este dată de $\|\varphi\|_1$, vom considera spațiul $H_L^1(\Omega_n)$ în care norma este însă indusă de produsul scalar (3.17) [în continuare însă spațiul $H_L^1(\Omega_n)$ îl vom nota tot cu $H^1(\Omega_n)$].

Trecînd la rezolvarea problemei Dirichlet atașată ecuației

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u = 0,$$

conform cu considerațiile anterioare, va trebui să determinăm funcția $u \in H^1(\Omega_n)$ care verifică (3.19) pentru orice funcție test φ și care este astfel încît pentru $u_0 \in H^1(\Omega_n)$ arbitrar, să avem $u - u_0 \in H_0^1(\Omega_n)$. Această funcție u se determină imediat scriind

$$H^1(\Omega_n) = H_0^1(\Omega_n) \oplus G,$$

unde G este complementul ortogonal al spațiului Hilbert $H_0^1(\Omega_n)$ în raport cu spațiul Hilbert $H^1(\Omega_n)$ și evident $G \neq \{0\}$, deoarece $H_0^1(\Omega_n)$ este un subspațiu strict al spațiului $H^1(\Omega_n)$. Prin urmare, conform cu teorema proiecțiilor ortogonale, elementul cunoscut $u_0 \in H^1(\Omega_n)$ se va scrie în mod unic sub forma

$$u_0 = u_0' + u_0'', \tag{3.20}$$

unde $u_0' \in H_0'(\Omega_n)$ iar $u_0'' \in G$, elementele u_0' și u_0'' fiind unic determinate și satisfac relația de ortogonalitate $(u_0', u_0'')_L = 0$ și deci pentru orice $\varphi \in H_0^1(\Omega_n)$ va fi valabilă relația $(\varphi, u_0'')_L = 0$. Notînd $u = u_0'' = \mathrm{P}_G u_0$, unde P_G este operatorul de proiecție în subspațiul $G \subset H^1(\Omega_n)$, avem egalitatea

$$(\varphi, u)_L = 0,$$

care comparată cu relația de definiție (3.19) arată că singura soluție posibilă a problemei Dirichlet în cauză va fi dată de egalitatea

$$u = \mathrm{P}_G u_0,$$

deoarece acest u va verifica atît (3.19) cît și condiția la limită $u - u_0 = \mathrm{P}_G u_0 - u_0 = u_0'' - u_0 = -u_0' \in H_0'(\Omega_n)$ în baza lui (3.20).

Astfel s-a demonstrat

Teorema 3.1. *Dacă $H^1(G_n)$ este completatul spațiului $C^\infty(\Omega_n)$ în raport cu norma dedusă din produsul scalar* (3.17) *iar $H_0^1(\Omega_n)$ completatul spațiului $C_0^\infty(\Omega_n)$ în raport cu aceeași normă și dacă $G = H^1(\Omega_n) \ominus H_0^1(\Omega_n)$, atunci soluția problemei Dirichlet slabe $u - u_0 \in H_0^1(\Omega_n)$ pentru un element u_0 arbitrar din $H^1(\Omega_n)$, atașată ecuației*

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u = 0,$$

admite o singură soluție dată de proecția ortogonală, în raport cu produsul scalar (3.17), *a elementului cunoscut u_0, în subspațiul G.*

Ecuația $\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u = 0$ se presupune că este uniform eliptică în Ω_n iar $\dfrac{\partial a_{jk}}{\partial x_l}$, $a \in C^0(\Omega_n)$ (evident, sînt posibile unele generalizări ale acestor condiții: de exemplu a_{jk} absolut continui în Ω_n iar a integrabilă în Ω_n, $0 < a_0 \leqslant a(\mathbf{x}) \leqslant a_0'$, $\mathbf{x} \in \Omega^n$).

Soluția obținută nu este în general o soluție ordinară a ecuației $\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u = 0$, chiar dacă u_0 este suficient de regulat, ea aparținînd evident domeniului de definiție a prelungirii slabe a operatorului (3.16).

3.2.2. Principiul lui Dirichlet

Rezultatele obținute în 3.2.1 pot fi legate de așa-numitul principiul lui Dirichlet, care reprezintă cea mai veche metodă de demonstrație a existenței unei soluții pentru problema Dirichlet clasică pentru ecuația Laplace. În forma sa inițială, principiul lui Dirichlet se enunță astfel:

Dintre toate funcțiile $v \in C^1(\Omega_n)$ care verifică condiția la limită $v(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega_n$ fie u acea funcție care face ca integrala Dirichlet

$$D(v) = \int_{\Omega_n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 \right] \mathrm{d}\mathbf{x}$$

să ia valoarea minimă; atunci u este soluția problemei Dirichlet $u|_{\partial\Omega_n} = u_0$ pentru ecuația Laplace $\Delta_n u = 0$.

Acest principiu astfel formulat provine din fizică, el însemnînd faptul că integrala energiei este minimă; de exemplu, în cazul unui conductor electric prin care trece un curent electric se cere să se piardă cît mai puţină energie electrică prin transformare în energie calorică. Gauss (1840) şi Kelvin (1847), plecînd de la aceste fapte au enunţat echivalenţa dintre o problemă la limită (în acest caz problema Dirichlet) şi o problemă variaţională. Într-un sens, această echivalenţă este imediată: fie $h \in C_0^1(\Omega)_n$, u o soluţie a problemei variaţionale enunţate şi ε un număr arbitrar; dacă punem

$$D(u, h) = \int_{\Omega_n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}\mathbf{x},$$

un calcul simplu arată că vom avea

$$D(u + \varepsilon h) = D(u) + 2\varepsilon D(u, h) + \varepsilon^2 D(h) \geqslant D(u)$$

sau

$$[\varepsilon D(h) + D(u, h)]^2 \geqslant D^2(u, h).$$

Inegalitatea rămîne valabilă pentru orice ε numai dacă $D(u,h) = 0$; această egalitate prin integrare prin părţi conduce la

$$\int_{\Omega_n} h(\mathbf{x})\, \Delta_n u \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

pentru orice $h \in C_0^1(\Omega_n)$, ceea ce antrenează $\Delta_n u = 0$ în Ω_n.

Pentru motive fizice şi deoarece integrala $D(v)$ este pozitivă, deci mărginită inferior, se trage concluzia că problema variaţională în cauză admite evident o soluţie şi de aici se obţine şi faptul că problema la limită are o soluţie. Riemann a dat numele de *principiul lui Dirichlet* acestei situaţii pe care a utilizat-o în teoria funcţiilor abeliene şi a problemelor la limită. Acest principiu a avut o importanţă deosebită în dezvoltarea ulterioară a matematicii. Cu atît mai mare a fost surpriza (în 1869) cînd Weierstass, printr-un exemplu, a arătat că principiul lui Dirichlet în general nu este valabil: există funcţionale care sînt pozitive, iau în clasa funcţiilor admisibile valori pozitive oricît de mici, dar nu există nici un element în clasa funcţiilor admisibile considerate care să dea funcţionalei considerate valoarea zero.

În baza celor de la 3.2.1, putem presupune că în cazul ecuaţiei $\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u = 0$, funcţionala care joacă rolul integralei lui Dirichlet este funcţionala (3.17) iar teorema 3.1 se va putea enunţa astfel:

Funcţionala $(u_0 - u,\ u_0 - u)_L = 0$, *în care* u_0 *este un element arbitrar din* $H^1(\Omega_n)$ *(dar fix) iar* $u \in H_0^1(\Omega_n)$, *ia valoarea minimă pentru o soluţie slabă a ecuaţiei considerate (deoarece se ştie că proiecţia ortogonală a lui* u_0 *realizează un minim pentru funcţionala* $\|u_0 - u\|_L$).

Din aceste consideraţii, în baza observaţiilor din 3.2.1, teorema 3.1 nu asigură existenţa unei funcţii de clasă $C^2(\Omega_n)$ care să realizeze acest minim ci stabileşte existenţa unui element din $H^1(\Omega_n)$ care să realizeze minimul solicitat. Prin urmare, aplicarea corectă a principiului lui Dirichlet este posibilă numai prin lărgirea noţiunii de soluţie.

În general o formă pătratică $(\varphi, \varphi)_L$ se numeşte *integrala Dirichlet corespunzătoare operatorului* L, dacă ecuaţia Euler-Ostrogradski corespunzătoare funcţionalei $I[\varphi] = (\varphi, \varphi)_L$ este ecuaţia $\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u = 0$. Prin urmare, în cazul ecuaţiei (3.16), integrala Dirichlet corespunzătoare va rezulta din produsul scalar $(\varphi, \varphi)_L$ exprimat prin egalitatea (3.17).

3.2.3. Metode de aproximare a soluţiilor: metoda Trefftz şi metoda Ritz

În baza celor demonstrate la 3.2.1, există o soluţie $u \in G(\Omega_n)$ a ecuaţiei $\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u = 0$ care verifică condiţia Dirichlet $(u - u_0) \in H_0^1(\Omega_n)$, unde $G(\Omega_n) = (H_0^1)^\perp$ iar $u_0 \in H^1$, spaţiile $H_1 = H^1(\Omega_n)$ şi $H_0^1(\Omega_n)$ fiind completatele mulţimilor $C^\infty(\Omega_n)$ şi $C_0^\infty(\Omega_n)$ în raport cu norma dedusă din produsul scalar (3.17). Deoarece spaţiul H^1 $(\Omega\ )$ este un spaţiu separabil, va rezulta că atît spaţiul H_0^1 cît şi spaţiul G sînt spaţii separabile. Deoarece $u = P_G u_0 \in G$, va exista un şir ortonormal $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ din G astfel încît orice element v al lui $G = G(\Omega_n)$ să fie exprimat prin seria

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j, \quad a_j = (v, e_j).$$

Fie $M_k = [e_1, \ldots, e_k]$, $k = 1,2,\ldots$, varietatea liniară generată de versorii $e_1, \ldots, e_k$ şi fie $P_k u = u_k$ proiecţia unui element oarecare u din H^1 în M_k, Evident,

$$\mathrm{P}_k w = \sum_{j=1}^{k} b_j e_j, \quad b_j = (P_k w, e_j)$$

iar dacă $w = u_0$, şirul $(P_k u_0)_{k\in\mathbb{N}}$ va converge către $P_G u_0 = u$, u fiind soluţia problemei Dirichlet considerate. Deoarece

$$\|P_{k+1}u_0\|_L^2 = \|P_k u_0 + a_{k+1}\, e_{k+1}\|^2 = \|P_k u_0\|^2 + |a_{k+1}|^2,$$

obţinem următorul şir de inegalităţi :

$$\|u_k\|_L \leqslant \|u_{k+1}\|_L \leqslant \|P_G u_0\|_L = \|u\|_L \leqslant \|u_0\|_L, \tag{3.21}$$

căci P_G fiind un proiector (deci $\|P_G\| \leqslant 1$), avem

$$\|P_G u_0\|_L \leqslant \|P_G\|_L \|u_0\|_L \leqslant \|u_0\|_L.$$

În acest mod şirul $(u_k = P_k u_0)_{k\in\mathbb{N}}$ va converge către $P_G u_0$ şi deci elementele acestui şir constituie aproximări ale soluţiei căutate.

Acest procedeu de aproximare a soluţiei problemei Dirichlet se numeşte *metoda lui Trefftz.*

O altă metodă de aproximare a soluţiei problemei Dirichlet constă în considerarea spaţiului $H_0^1(\Omega_n)$ în locul spaţiului $G(\Omega_n)$. Spaţiul $H_0^1(\Omega_n)$ fiind de asemenea separabil, fie $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un şir ortonormal complet în $H_0^1(\Omega_n)$ şi fie W_k varietatea liniară generată de elementele $f_1, \ldots, f_k$; deci $W_k = [f_1, \ldots, f_k]$. Fie $\overline{P}_k u = u'_k$ proiecţia unui element oarecare $u \in H^1(\Omega_n)$ în W şi să considerăm şirul $(u''_k = u_0 - \overline{P}_k u_0)_{k\in\mathbb{N}}$. În baza consideraţiilor anterioare, şirul $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ va converge evident către elementul $u_0 - \overline{P}u_0$, unde $\overline{P}u_0$ va fi proiecţia lui $u_0 \in H^1(\Omega_n)$ în spaţiul $H^1(\Omega_n)$; în baza descompunerii

$$u_0 = \overline{P}u_0 + \overline{P}_G u_0$$

va rezulta egalitatea

$$u - \overline{P}u_0 = \overline{P}_G u_0 = u,$$

u fiind soluţia problemei Dirichlet considerate. Deoarece

$$\overline{P}_k u_k = \sum_{j=1}^{k} c_j f_j, \quad c_j = (\overline{P}_k u_0, f_j)_L,$$

vom putea scrie

$$\|u''_{k+1}\|^2 = \|u_0 - \overline{P}_{k+1}u_0\|_L^2 = \|(u_0 - \overline{P}_k u_0) - c_{k+1}f_{k+1}\|_L^2 =$$

$$= \|u''_k - c_{k+1}f_{k+1}\|_L^2 = \|u''_k\|_L^2 - \bar{c}_{k+1}(f_{k+1}, u''_k)_L -$$

$$- \bar{c}_{k+1}(u''_k, f_{k+1})_L + |c_{k+1}| = \|u''_k\|_L^2 - |c_{k+1}|^2 \leqslant \|u''_L\|_L^2$$

pentru că

$$(u''_k, f_{k+1})_L = (u_0 - \overline{P}_k u_0, f_{k+1})_L = (u_0, f_{k+1})_L = (\overline{P}u_0 + \overline{P}_G u_0, f_{k+1})_L =$$

$$= (\overline{P}u_0, f_{k+1}) = c_{k+1}$$

şi deoarece $f_{k+1} \in H_0^1(\Omega_n)$, deci este ortogonal pe $\overline{P}_G u_0$.

Prin urmare, în acest caz, spre deosebire de cazul anterior se vor obţine inegalităţile

$$\|u''_k\|_L \geqslant \|u''_{k+1}\|_L \geqslant \|u\|_L, \tag{3.21'}$$

ultima inegalitate obţinîndu-se imediat deoarece

$$u''_k = u_0 - \overline{P}_k u_0 = \overline{P}_G u_0 + \overline{P}u_0 - \overline{P}_k u_0 = u + \overline{P}_k u_0 - \overline{P}_k u_0$$

şi deci

$$\|u''_k\|_L^2 = \|u\|_L^2 + \|\overline{P}u_0 - \overline{P}_k u_0\|_L^2$$

deoarece $\overline{P}u_0 - \overline{P}_k u_k \in H_0^1$, ceea ce face ca u să fie ortogonal pe $\overline{P}u_0 - \overline{P}_k u_0$; rezultă că pentru orice k, $\|u''_k\|_L \geqslant \|u\|_L^2$. Şirul $(u''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ construit se numeşte *şirul Ritz* corespunzător problemei Dirichlet considerate. Aşadar, putem considera ca fiind demonstrată teorema următoare :

Teorema 3.2. *Şirurile de aproximaţii ale lui Trefftz şi Ritz, cu termenii generali respectiv*

$$u_k = P_k u_0, \quad u''_k = u_0 - \overline{P}_k u_0,$$

converg în norma $\|\cdot\|_L$ *către soluţia problemei Dirichlet* $(u - u_0) \in H_0^1(\Omega_n)$ *pentru ecuaţia* $L(\mathbf{x}, D)u = u$ *şi sînt valabile inegalităţile* (3.21) *şi* (3.21').

După cum s-a observat anterior aproximata u_k va fi o combinaţie liniară a elementelor $e_1, \ldots, e_k$:

$$u_k = \sum_{j=1}^{k} b_j e_j = P_k u_0 = u_0 + (P_k u_0 - u_0)$$

Deoarece $P_k u_0 - u_0 \in H_0^1(\Omega_n)$ iar $e_j \in H_0^1(\Omega_n)$, efectuînd produsele scalare $(u_k, e_l)_L$, $l = 1, \ldots, k$, vom găsi sistemul de ecuaţii

$$\sum_{j=1}^{k} b_j (e_j, e_l)_L = (u_0, e_l)_L, \quad l = 1, \ldots, k$$

din care se determină constantele $b_1, \ldots, b_k$ chiar dacă sistemul (e_j) nu este ortonormal ci numai liniar independent.

În mod analog, considerînd sistemul (f_j) din $H_0^1(\Omega_n)$ doar liniar independent, din definiția $u_k'' = u_0 - \bar{P}_k u_0 = u_0 - \sum_{j=1}^{k} c_j f_j$, pentru constantele $c_1, \ldots, c_k$ se obține următorul sistem liniar de ecuații algebrice

$$\sum_{j=1}^{k} c_j (f_j, f_l)_L = (u_0, f_l)_L$$

deoarece $u_k'' \in G(\Omega_n)$ și deci $(u_k'', f_l) = 0$.

3.2.4. Existența soluțiilor slabe pentru ecuații uniform eliptice de ordinul al doilea

Vom reveni la noțiunile introduse la 3.1.2 și vom arăta în ce condiții pot exista soluții slabe [adică soluții în $L^2(\Omega_n)$] pentru o ecuație uniform eliptică de ordinul al doilea cu coeficienți reali [$a_{jk} \in C^1(\Omega_n)$, a_j, $a \in C^0(\Omega_n)$]. Vom utiliza notațiile anterioare: $H^0(\Omega_n) = H_0^0(\Omega_n) = L^2(\Omega_n)$ fiind spațiul obținut prin completarea spațiului $C_0^\infty(\Omega_n)$ [sau a spațiului $C^\infty(\Omega_n)$] în raport cu norma

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_0 = \sqrt{(\varphi, \varphi)_0}, \; (\varphi, \psi)_0 = (\varphi, \psi) = \int_{\Omega_n} \varphi\psi \, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

$H^1(\Omega_n)$ [respectiv $H_0^1(\Omega_n)$] obținîndu-se prin completarea spațiului $C^\infty(\Omega_n)$ [respectiv $C_0^\infty(\Omega_n)$] în raport cu norma $\|\varphi\|_1 = \sqrt{(\varphi, \varphi)_1}$, unde

$$(\varphi, \psi)_1 = \int_{\Omega_n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \varphi\psi \right) \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

După cum s-a precizat, vom spune că u este soluția slabă a problemei Dirichlet $(u - u_0) \in H_0^1(\Omega_n)$ pentru ecuația (3.11) dacă se verifică relația (3.15) pentru orice funcție test φ, unde $B(\varphi, \psi)$ pentru $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega_n)$ este dat de (3.14):

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_n} \left[\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j'(\mathbf{x}) \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + a(\mathbf{x}) \varphi\psi \right] \mathrm{d}\mathbf{x}$$

(în definiția problemei Dirichlet putem presupune fără a micșora generalitatea că $u_0 = 0$).

Acum vom deduce un rezultat esențial pentru demonstrarea existenței soluției slabe care ne interesează.

Teorema 3.3. *Forma biliniară $B(\varphi, \psi)$ definită prin (3.14) verifică inegalitățile*

$$|B(\varphi, \psi)| \leqslant C \cdot \|\varphi\|_1 \cdot \|\psi\|_1, \tag{3.22}$$

$$B(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \|\varphi\|_1^2 - k_0 \|\varphi\|_0^2, \tag{3.23}$$

oricare ar fi funcțiile test φ și ψ, dacă operatorul care conduce la $B(\varphi, \psi)$ este uniform eliptic în Ω, $k_1 > 0$.

⌜ Inegalitatea (3.22) este imediată, aceasta obținîndu-se prin aplicarea repetată a inegalității lui Schwartz și a inegalității $2ab \leqslant a^2 + b^2$, $a > 0$, $b > 0$, exact așa cum s-a procedat la 3.2.1 pentru obținerea inegalității $(\varphi, \varphi)_L \leqslant b_1 \|\varphi\|_1^2$. Inegalitatea (3.23) se demonstrează cu ajutorul condiției de uniform elipticitate a operatorului L:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x}) \xi_j \xi_k \geqslant c_0 \|\xi\|^2.$$

Deoarece

$$B(\varphi, \varphi) = \int_{\Omega_n} \left[\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j'(\mathbf{x}) \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + a(\mathbf{x}) \varphi^2 \right] \mathrm{d}\mathbf{x},$$

în baza inegalității anterioare găsim

$$B(\varphi, \varphi) \geqslant c_0 \int_{\Omega_n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 \right] \mathrm{d}\mathbf{x} + B_1,$$

unde

$$B_1 = \int_{\Omega_n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_j'(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \varphi + a(\mathbf{x}) \varphi^2 \right] \mathrm{d}\mathbf{x}$$

și deci

$$|B_1| \leqslant c_1 \int_{\Omega_n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right| \right) \mathrm{d}\mathbf{x} + c_2 \int_{\Omega_n} \varphi^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

cu

$$c_1 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_n} |a_j'(\mathbf{x})|, \qquad c_2 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_n} |a(\mathbf{x})|.$$

Deoarece pentru orice $\varepsilon > 0$ putem scrie

$$2|ab| = 2 \left| \sqrt{\varepsilon} a \right| \left| \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}} \right| \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon},$$

un calcul imediat arată că

$$|B_1| \leqslant \frac{c_1\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2\right]dx + \frac{c_1}{2\varepsilon}\int\limits_{\Omega_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi^2\right)dx + c_2\int\limits_{\Omega_n}\varphi^2\,dx =$$

$$= \frac{c_1\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2\right]dx + \left(\frac{c_1 n}{2\varepsilon} + c_2\right)\int\limits_{\Omega_n}\varphi^2\,dx;$$

deci

$$B_1 \geqslant -\frac{c_1\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2\right]dx - \left(\frac{c_1 n}{2\varepsilon} + c_2\right)\int\limits_{\Omega_n}\varphi^2\,dx.$$

Revenind la evaluarea lui $B(\varphi, \varphi)$, găsim

$$B(\varphi,\varphi) \geqslant \left(c_0 - \frac{c_1}{2}\varepsilon\right)\int\limits_{\Omega_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2\right]dx - \left(\frac{c_1 n}{2\varepsilon} + c_2\right)\int\limits_{\Omega_n}\varphi^2\,dx$$

și luînd $\varepsilon = c_0/c_1$ (dacă $c_1 = 0$, inegalitatea este deja demonstrată), se deduce,

$$B(\varphi,\varphi) \leqslant \frac{c_0}{2}\int\limits_{\Omega_n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 + \varphi^2\right]dx - \left(\frac{c_1^2 n}{2c_0} + c_2 + \frac{c_0}{2}\right)\int\limits_{\Omega_n}\varphi^2\,dx =$$

$$= k_1\|\varphi\|_1^2 - k_0\|\varphi\|_0^2,$$

unde s-a notat

$$k_1 = \frac{c_0}{2}, \quad k_0 = \frac{c_1^2 n}{2c_0} + c_2 + \frac{c_0}{2}. \qquad \lrcorner$$

Relația (3.22) arată că funcționala biliniară $B(\varphi, \varphi)$ este mărginită oricare ar fi funcțiile test $\varphi = \varphi_j$, $\psi = \psi_k \in C_0^\infty(\Omega_n)$ (sau chiar dacă φ_j, $\psi_k \in C^\infty(\Omega_n)$. Rezultă că putem trece la limită cînd $\varphi_j \to v$, $\psi_k \to u$, convergența fiind convergența din spațiul $H_0^1(\Omega_n)$ [sau $H^1(\Omega_n)$] în care caz u, $v \in H_0^1(\Omega_n)$ [sau u, $v \in H^1(\Omega_n)$]. Așa că în locul inegalității (2.22) vom putea considera relația

$$|B(v, u)| \leqslant C\|v\|_1\|u\|_1, \tag{3.22'}$$

unde u, $v \in H_0^1(\Omega_n)$ [sau $H^1(\Omega_n)$] și reciproc, în locul egalității ei (3.22') vom putea considera cu același grad de generalitate relația (3.22).

O b s e r v a ț i e . Dacă în locul operatorului L utilizăm operatorul $L + k$, unde $k > 0$ este o constantă, calculele anterioare rămîn în întregime valabile, cu condiția să considerăm în locul funcționalei B funcționala $B(\varphi, \varphi) - k\|\varphi\|_0^2$ și deci vom obține inegalitatea

$$B(\varphi,\varphi) - k\|\varphi\|_0^2 \geqslant -\frac{c_1\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2\right]dx - \left(\frac{c_1 n}{2\varepsilon} + c_2\right)\int\limits_{\Omega_n}\varphi^2\,dx$$

care va conduce la inegalitatea $\left(\text{cu } \varepsilon = \frac{c_0}{c_1}\right)$

$$B(\varphi,\varphi) \geqslant k_1\|\varphi\|_1 + (k - k_0)\|\varphi\|_0^2. \tag{3.23'}$$

Teorema 3.4. (*de existență a soluției slabe*). *Pentru* $k_0 = 0$ *ecuația uniform eliptică* $L(x, D)u = f$ *admite o singură soluție slabă* $u \in H_0^1(\Omega_n)$ *iar pentru* $k_0 > 0$ *este valabilă alternativa lui Fredholm* [*dacă* $f \in L^2(\Omega_n)$].

⌜ În ipoteza $k_0 = 0$, în baza teoremei 3.3 se va putea aplica teorema Lax-Milgram* și deci, pentru orice funcție test φ vom putea scrie [cu $H = H_0^1(\Omega_n)$]

$$B(\varphi, u) = (\varphi, Su)_1,$$

unde S este un operator liniar și continuu, definit în $H_0^1(\Omega_n)$ și admițînd un invers continuu iar $\|S^{-1}\| \leqslant \frac{1}{k_1}$.

Pe de altă parte, ipoteza $f \in L^2(\Omega_n)$ face ca produsul scalar $(\varphi, f) = (\varphi, f)_0$ să reprezinte o funcțională liniară și mărginită pentru $\varphi \in H_0^1(\Omega_n)$, după cum rezultă din definiția produsului scalar și a inegalității lui Schwartz :

$$|(\varphi, f)_0| \leqslant \|\varphi\|_0\|f\|_0 \leqslant C'\|\varphi\|_0 \leqslant C'\|\varphi\|_1.$$

Prin urmare, $H_0^1(\Omega_n)$ fiind un spațiu Hilbert, conform cu teorema lui Riesz, vom putea scrie egalitatea $(\varphi, f)_0 = (\varphi, g)_1$ pentru orice $\varphi \in H_0^1(\Omega_n)$, deci și pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_n)$, unde g este un element fix al spațiului $H_0^1(\Omega_n)$.

Așadar, relația $B(\varphi, u) = (\varphi, f)_0$, care definește soluția slabă pentru ecuația $L(x, D)u = f$, se va putea scrie și sub forma

$$(\varphi, Su)_1 = (\varphi, g)_1$$

---

* Teorema Lax-Milgram afirmă că orice funcțională biliniară mărginită și pozitivă $B(x, y)$ (x, y fiind elemente dintr-un spațiu Hilbert) se poate scrie $B(x, y) = (x, Sy)$, $S : H \to H$, $\|S\| \leqslant C$ existînd S^{-1} iar $\|S\|^{-1} \geqslant \frac{1}{k_1}$, $|B(x, y)| \leqslant C\|x\|\,\|y\|$, $B(x, x) \geqslant k_1\|x\|^2$).

și deoarece $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_n)$ este arbitrar, egalitatea anterioară este echivalentă cu egalitatea $Su = g$ iar soluția căutată va fi $u = S^{-1}g$ și este unic determinată.

Pentru $k_0 > 0$, vom scrie ecuația $\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u = f$ sub forma

$$(\mathrm{L} + k_0)u - k_0 u = f$$

iar conform cu o observație anterioară, funcționala biliniară corespunzătoare operatorului $\mathrm{L} + k_0$ va verifica condițiile teoremei Lax-Milgram iar relația de definiție a soluției slabe, în acest caz, va fi dată de

$$B_{k_0}(\varphi, u) = (\varphi, f + k_0 u), \tag{3.24}$$

de unde rezultă, în baza primei părți a demonstrației, că relația de mai jos valabilă pentru orice funcție test φ,

$$B_{k_0}(\varphi, u) = (\varphi, f)_0$$

admite o singură soluție u, pentru orice $f \in L^2(\Omega_n)$, $u \in H_0^1(\Omega_n)$. Fie $u = \mathrm{A}f$ corespondența dintre f și u; din inegalitatea $B_{k_0}(u, u) \geqslant k_1(u, u)_1$ care este valabilă și pentru $\varphi \in H_0^1(\Omega_n)$ și din ecuația $B_{k_0}(\varphi, u) = (\varphi, f)_0$, obținem succesiv:

$$\|\mathrm{A}f\|_1^2 = \|u\|_1^2 = (u,u)_1 \leqslant \frac{1}{k_1} B_{k_0}(u, u) = \frac{1}{k_1}(u, f) \leqslant \frac{1}{k_1}\|u\|_0 \|f\|_0 \leqslant \frac{1}{k_1}\|u\|_1 \|f\|_0$$

Prin urmare, se obține inegalitatea

$$\|\mathrm{A}f\|_1 \leqslant \frac{1}{k_1}\|f\|_0$$

care în baza teoremei lui Rellich * arată că operatorul A este un operator complet continuu, ca operator cu mulțimea de definiție $L^2(\Omega_n)$, mulțimea valorilor în $H_0^1(\Omega_n) \subset L^2(\Omega_n)$. Din inegalitatea (3.24), în baza definiției operatorului A, va rezulta egalitatea

$$u = \mathrm{A}(k_0 u + f) = k_0 \mathrm{A}u + f_1, f_1 = \mathrm{A}f. \tag{3.42)'}$$

Așadar, în cazul $k_0 > 0$, rezolvarea ecuației $\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})u = f$ în $H_0^1(\Omega_n)$ s-a redus la rezolvarea ecuației (3.24'), este A este un operator complet continuu în $L^2(\Omega_n)$. În baza teoriei Fredholm-Riesz-Schauder rezultă că existența soluției slabe în acest caz este legată de alternativa lui Fredholm. □

Cu ajutorul acestei teoreme vom putea arăta ușor că ecuațiile

$$\mathrm{L}u = f,\ \mathrm{L}^+v = g,\ f,\ g \in L^2(\Omega_n) \tag{3.25}$$

formează o pereche Fredholm (în ipoteza că este posibilă determinarea operatorului L^+).

Să presupunem că operatorul L definit inițial are coeficienții suficient de regulați astfel încît pentru orice $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega_n)$ să avem egalitatea cunoscută $(\mathrm{L}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathrm{L}^+\psi)$; pentru aceasta este suficient să presupunem $a_{jk}, a'_j \in C^1(\Omega_n)$. Conform cu definiția funcționalei biliniare $B(\varphi, \psi)$ [vezi relațiile (3.12) și (3.14)], vom putea scrie egalitățile

$$B(\varphi, \psi) = (\varphi, \mathrm{L}\psi) = (\mathrm{L}^+\varphi, \psi),$$

oricare ar fi funcțiile $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega_n)$ (evident, se poate presupune că numai una din aceste funcții este funcție test). Deoarece operatorul L^+ este de aceeași formă cu operatorul L, eventual cu alți coeficienți, vom nota

$$B^+(\varphi, \psi) = (\varphi, \mathrm{L}^+\psi)$$

și deoarece $(\varphi, \mathrm{L}^+\psi) = (\mathrm{L}\varphi, \psi) = (\psi, \mathrm{L}\varphi)$, vom avea egalitatea

$$B^+(\varphi, \psi) = B(\psi, \varphi),\ \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega_n). \tag{3.26}$$

Conform cu teoria expusă anterior, soluția slabă a primei ecuații (3.25) se obține determinîndu-se $u \in H_0^1(\Omega_n)$ astfel încît pentru orice funcție test φ să avem egalitatea

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f)_0 \tag{3.27}$$

iar pentru a doua ecuație (3.25) vom obține relația

$$B^+(\psi, v) = (\psi, g)_0. \tag{3.28}$$

Conform cu teorema 3.4, ecuația (3.27) conduce la egalittea

$$u = \mathrm{A}f \tag{3.27'}$$

iar relația (3.28), la egalitatea

$$v = \mathrm{A}_1 g, \tag{3.28'}$$

* Teorema lui Rellich afirmă că dacă $\mathrm{A} : H^m(\Omega_n) \to H^m(\Omega_n)$, $\overline{\Omega}_n$ fiind un compact din $\mathbb{R}^n$, este o aplicație liniară și mărginită iar $\|A\varphi\|_m \leqslant C\|\varphi\|_j$, $j < m$, atunci A este un operator complet continuu.

A și A_1 fiind operatori complet continui în $L^2(\Omega_n)$. Deoarece $u \in H_0^1(\Omega_n)$, $v \in H_0^1(\Omega_n)$, prin completare în (3.27) și (3.28), făcînd ca $\varphi = \varphi_j \to v$ și $\psi = \psi_k \to u$, vom obține egalitățile

$$B(v, u) = (v, f)_0, \quad B^+(u, v) = (u, g)_0$$

și în baza egalității (3.26) care este valabilă și pentru $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega_n)$ vom obține egalitatea $(v, f)_0 = (u, g)_0$, oricare ar fi f și g din $L^2(\Omega_n)$.

Ținînd seama de egalitățile (3.27) și (3.28), se obține egalitatea

$$(A_1 g, f)_0 = (Af, g)_0 \; [= (g, Af)_0] \quad f, g \in L^2(\Omega_n).$$

care arată că $A_1 = A^*$ (conform cu definiția operatorului adjunct într-un spațiu Hilbert).

Așadar, dacă prima ecuație (3.25) se rezolvă cu ajutorul operatorului A (deci putem scrie $A = L^{-1}$) atunci a doua ecuație (3.25), care este ecuația adjunctă atașată primei ecuații, se va rezolva [în $H_0^1(\Omega_n)$] cu ajutorul adjunctului operatorului A.

Considerațiile anterioare au fost făcute în ipoteza $k_0 = 0$, ceea ce evident nu constituie o restricție, deoarece dacă

$$B(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \|\varphi\|_1^2 - k_0 \|\varphi\|_0^2,$$

$$B^+(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \|\varphi\|_1^2 - k_0^+ \|\varphi\|_0^2$$

(din definiția lui k_1 se constată că această constantă depinde de coeficienții a_{jk} ai lui L, care apar neschimbați în L^+) și luînd în considerare operatorul $L + k$, $k = \max\{k_0, k_0^+\}$, vom avea

$$B(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \|\varphi\|_1^2 \quad \text{și} \quad B^+(\psi, \psi) \leqslant k_1 \|\psi\|_1^2.$$

În baza acestei corespondențe, alternativa lui Fredholm, valabilă pentru operatori complet continui în spații Hilbert se va transforma în alternativa lui Fredholm pentru operatorul diferențial L definit la începutul acestui capitol, deoarece valorile caracteristice ale operatorului A vor coincide cu valorile proprii ale operatorului L, datorită faptului că în baza teoremei 4 avem

$$Af = u \quad \text{dacă} \quad Lu = f,$$

ceea ce înseamnă pe de o parte $A(Lu) = u$, oricare ar fi $u \in L_2(\Omega_n)$ (deci $AL = I$) și pe de altă parte $L(Af) = f$, oricare ar fi $f \in L^2(\Omega_n)$ (deci $LA = I$), I fiind operatorul identic. Deci, dacă avem $\lambda Af + f = 0$, vom avea

$$\lambda L(Af) + If = 0$$

sau

$$\lambda f + Lf = 0$$

și invers.

Pentru a termina justificarea valabilității alternativei lui Fredholm pentru operatorul L mai trebuie arătat că ortogonalitatea termenului liber f pe soluțiile ecuației adjuncte omogene

$$L^+ v + \lambda v = 0$$

(în cazul existenței unei valori proprii) rezultă din ortogonalitatea corespunzătoare cunoscută pentru valorile caracteristice ale operatorului invers $A_\lambda = \lambda A + I$. Într-adevăr se poate scrie șirul de egalități:

$$0 = (Af, v_j)_0 = (f, A^* v_j)_0 = \left(f, -\frac{1}{\lambda} v_j\right)_0 = -\frac{1}{\bar{\lambda}} (f, v_j)_0,$$

de unde rezultă $(f, v_j) = 0$; s-au utilizat ecuațiile $Lu + \lambda u = 0$, (sau $u + \lambda Au = Af$) și $L^+ v_j + \bar{\lambda} v_j = 0$ (sau $v_j + \bar{\lambda} A^* v_j = 0$).

În acest mod, putem enunța rezultatul final privind soluțiile slabe ale problemei Dirichlet pentru ecuația uniform eliptică de ordinul al doilea $L(x, D)u = f$, $f \in L^2(\Omega_n)$:

Teorema 3.5. *Dacă ecuația omogenă* $Lu + \lambda u = 0$ *admite în* $H_0^1(\Omega_n)$ *numai soluția banală, atunci ecuația neomogenă* $Lu + \lambda u = f$ *admite o singură soluție în* $H_0^1(\Omega_n)$.

Dacă ecuația omogenă $Lu + \lambda u = 0$ *admite în* $H_0^1(\Omega_n)$ p *soluții liniar independente, atunci* $p < \infty$, *iar ecuația neomogenă* $Lu + \lambda u = f$ *va admite soluții în* $H_0^1(\Omega_n)$ *dacă și numai dacă* f *este ortogonală pe cele* p *soluții liniar independente ale ecuației adjuncte omogene* $L^+ v + \bar{\lambda} v = 0$.

3.2.5. Existența soluției slabe pentru operatori eliptici formal autoadjuncți

Utilizînd teoria funcțiilor și valorilor proprii pentru operatori formal autoadjuncți, expusă în cap. 4 din vol. 2, se pot obține rezultatele din 3.2.4 pe o cale elementară. Astfel, dacă L(x, D) este un operator diferențial de ordinul al doilea uniform eliptic, va

exista o infinitate numărabilă de funcţii şi valori proprii în $H_0^1(\Omega_n)$ ($\overline{\Omega}_n \subset \mathbb{R}^n$ fiind un compact) pentru acest operator; vom avea

$$(v_m, \mathrm{L}\varphi)_0 = \lambda_m (v_m, \varphi)_0$$

pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_n)$, şirul valorilor proprii (λ_m) fiind real iar şirul funcţiilor proprii (v_m) este ortonormal în $L^2(\Omega_n)$ şi complet în $H_0^1(\Omega_n)$. Presupunînd soluţia slabă a problemei Dirichlet

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})\, u = F(\mathbf{x}), \quad u \in H_0^1(\Omega_n) \tag{3.29}$$

de forma

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(\mathbf{x}), \tag{3.30}$$

în ipoteza convergenţei acestei serii avem $u \in H_0^1(\Omega_n)$ (deoarece fiecare funcţie proprie v_k are această proprietate), prin înlocuire în egalitatea de definiţie a soluţiei slabe $(u, \mathrm{L}\varphi)_0 = (F, \varphi)_0$ se deduce imediat egalitatea

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (v_k, \mathrm{L}\varphi)_0 = (F, \varphi)_0.$$

Utilizînd (3.29), rezultă egalitatea

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k v_k, \varphi \right) = (F, \varphi)_0.$$

care, deoarece φ este arbitrar, se scrie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k v_k = F.$$

Rezultă

$$a_k = \frac{(F, v_k)_0}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

dacă $\lambda_k \neq 0$ şi $F \in L^2(\Omega_n)$. Aşadar soluţia (3.30) este unic determinată dacă toate valorile proprii ale operatorului L sînt nenule; dacă $\lambda_{k_0} = 0$, atunci a_{k_0} nu poate fi determinat şi soluţia nu va exista decît dacă $(F, v_{k_0})_0 = 0$ (evident în acest caz a_{k_0} va fi arbitrar şi soluţia nu este unic determinată). În acest mod se reobţine alternativa lui Fredholm, care a fost stabilită în cadrul general din 3.2.4.

3.3. Soluţia elementară a ecuaţiei Laplace şi consecinţele ei

3.3.1. Potenţialul de volum din $\mathbb{R}^n$

În 2.4.4.4 s-a arătat că soluţia elementară a operatorului Laplace din $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, este funcţia $\mathscr{E}_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ local integrabilă în $\mathbb{R}^n$, definită prin

$$\mathscr{E}_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \|\mathbf{x}\|^{2-n}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots, \tag{3.31}$$

unde $\omega_n = 2\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$; cu alte cuvinte, în sensul teoriei distribuţiilor are loc egalitatea

$$\Delta_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \quad \Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{3.32}$$

deci, pentru orice funcţie test φ putem scrie

$$\langle \Delta_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \varphi(0). \tag{3.32'}$$

şi în baza formei speciale a operatorului eliptic Δ_n, ultima egalitate se transcrie şi sub forma

$$\langle \mathscr{E}_n(\mathbf{x}), \Delta_n \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \varphi(0). \tag{3.32''}$$

Utilizînd definiţia soluţiei elementare pentru operatori diferenţiali, se deduce că o soluţie particulară a ecuaţiei Poisson

$$\Delta_n u = F \tag{3.33}$$

va putea fi scrisă sub forma

$$u(\mathbf{x}) = \mathscr{E}_n(\mathbf{x}) * F(\mathbf{x}) \tag{3.34}$$

pentru orice distribuţie F pentru care convoluţia are sens (ceea ce se întîmplă dacă suportul lui F este compact); orice soluţie a ecuaţiei Poisson (3.33) se va scrie deci sub forma

$$u(\mathbf{x}) = u_h(\mathbf{x}) + \mathscr{E}_n(\mathbf{x}) * F(\mathbf{x}),$$

unde u_h este soluție a ecuației omogene $\Delta_n u_h = 0$, deci a ecuației Laplace.

În ipoteza că F este o distribuție regulată, astfel încît $\operatorname{supp} F \subset D_n$, din (3.34) se deduce

$$u(\mathbf{x}) = \int_{D_n} \mathscr{E}(\mathbf{x}-\mathbf{y})F(\mathbf{x})\,d\mathbf{y} = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\int_{D_n}\frac{F(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}}; \quad (3.34')$$

notînd prin V integrala improprie (cu $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ parametri),

$$V(\mathbf{x}) = \int_{D_n}\frac{F(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}}\,d\mathbf{y}, \quad (3.35)$$

funcția V se va numi *potențial de volum* în $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, generat de distribuția de sarcini F (etalate în D_n); acest potențial de volum va fi deci o soluție (distribuție) a ecuației Poisson

$$\Delta_n u = (2-n)\,\omega_n F.$$

Deoarece integralele improprii de forma (cu f integrabil și mărginit)

$$I(\mathbf{x}) = \int_{D_n}\frac{f(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{\alpha}}\,d\mathbf{y}, \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad (3.35')$$

sînt convergente (în sensul valorii principale Cauchy) pentru $\alpha < n$ și sînt divergente dacă $\alpha \geqslant n$, se deduce că potențialul de volum (3.35) va fi definit în $\mathbb{R}^n$ printr-o integrală improprie uniform convergentă (dacă f este integrabilă și mărginită în D_n). În baza teoriei cunoscute, se deduce că V va defini o funcție continuă în întreg $\mathbb{R}^n$ (care pentru $\|\mathbf{x}\|\to\infty$ va tinde uniform la zero).

Deoarece derivatele parțiale $\dfrac{\partial V}{\partial x_j}$ sînt definite tot prin integrale improprii uniform convergente [derivînd o dată în raport cu parametrii $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se obține o integrală improprie de forma (3.35') cu $\alpha = n-1 < n$], se deduce $V\in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.6. *Dacă F este o funcție derivabilă în D_n iar derivatele parțiale sînt mărginite și integrabile în D_n, atunci potențialul de volum* (3.35) *este o soluție ordinară a ecuației* (3.33).

⌐ Conform cu teoria generală, va fi suficient să demonstrăm că funcția V în cauză este o funcție de clasă C^2 în D_n (în condițiile din enunțul teoremei). Deoarece V este de clasă C^1 în $\mathbb{R}^n$ (F fiind derivabilă, deci este mărginită și integrabilă în D_n), vom putea calcula derivatele de ordinul întîi prin derivare directă sub semnul integral. Avem

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \int_{D_n} F(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial x_j}(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n})\,d\mathbf{y} = -\int_{D_n} F(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_j}(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n})\,d\mathbf{y} =$$

$$= -\int_{D_n}\frac{\partial}{\partial y_j}[F(\mathbf{y})\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}]\,d\mathbf{y} + \int_{D_n}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}\frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}_j}\,d\mathbf{y},$$

dacă se utilizează faptul că $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = -\dfrac{\partial}{\partial y_j}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ și se folosește formula de derivare a unui produs. Aplicînd formula flux-divergență integralei $\displaystyle\int_{D_n}\frac{\partial}{\partial y_j}[F(\mathbf{y})\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}]\,d\mathbf{y}$ (care este aplicabilă dacă integrandul are o singularitate integrabilă), vom putea scrie

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \int_{D_n}\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}}\frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y_j}\,d\mathbf{y} - \int_{\partial D_n}\frac{F(\mathbf{y})\,\nu_j}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}}\,d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad (3.36)$$

$j = 1,2,\ldots,n$, unde ν_j este cosinusul director față de axa Ox_j a normalei exterioare la ∂D_n (evident, vom presupune F integrabilă pe $\bar{D}_n$). Analizînd identitatea (3.36), constatăm că $\dfrac{\partial V}{\partial x_j}$ este o sumă de doi termeni de clasă C^1 în D_n; într-adevăr, primul termen este un potențial de volum cu distribuție $\dfrac{\partial F}{\partial y_j}$ (care este mărginită și integrabilă în D_n) iar al doilea termen este o integrală de suprafață care este, în afara domeniului de integrare (deci în afara lui ∂D_n), o funcție indefinit derivabilă (deoarece pentru $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$ avem $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{\alpha}\in C^{\infty}$). ⌙

3.3.2. Formulele lui Green și formulele de reprezentare

Pentru a deduce proprietăți ale soluțiilor ecuației lui Laplace sau Poisson sînt necesare unele formule auxiliare, denumite de obicei *formulele lui Green* și *formulele de reprezentare.*

Teorema 3.7. *Dacă u este o funcție de clasă $C^0(\bar{D}_n)$ și de clasă $C^1(D_n)$, iar v este o funcție de clasă $C^1(\bar{D}_n)$ și de clasă $C^2(D_n)$, este valabilă prima formulă a lui Green :*

$$\int_{D_n} u(\mathbf{x})\,\Delta_n v(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{D_n} (\nabla_n u(\mathbf{x}),\ \nabla_n v(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} = \int_{\partial D_n} u(\mathbf{x})\,\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \nu}\,d\sigma, \qquad (3.37)$$

în care $\frac{\partial}{\partial \nu}$ este derivata în raport cu direcția normalei exterioare la ∂D_n, ∇_n este operatorul vectorial simbolic nabla $\left(\nabla_n f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{i}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_j\right.$ fiind versorul axei Ox_j), iar domeniul D_n este mărginit, cu frontieră netedă astfel încît perechii $(D_n, \partial D_n)$ i se poate aplica formula flux-divergență (formula Gauss-Ostrogradski).

⌜ Demonstrația este imediată, rezultînd din formula flux-divergență.

$$\int_{D_n} \operatorname{div}\mathbf{F}\,d\mathbf{x} = \int_{\partial D_n} (\mathbf{F}, \boldsymbol{\nu})\,d\sigma$$

în care se pune $\mathbf{F} = u(x)\nabla_n v(x)$; evident $\mathbf{F} \in C^1(D_n)$ și $\mathbf{F} \in C^0(\bar{D}_n)$, iar $\operatorname{div}\mathbf{F} = u(x)\operatorname{div}(\nabla_n v) + (\nabla_n u, \nabla_n v) = u\Delta_n v + (\nabla_n u, \nabla_n v)$ deoarece $\operatorname{div}(\nabla_n v) = \Delta_n v$ și $(\mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}) = u\frac{\partial v}{\partial \nu}$, fiindcă $\frac{\partial f}{\partial \nu} = (\nabla_n f, \boldsymbol{\nu})$; înlocuind aceste expresii în formula anterioară, se va obține, evident, formula în cauză. ⌟

Teorema 3.8. *Dacă u și v sînt funcții de clasă $C^1(\bar{D}_n)$ și de clasă $C^2(D_n)$, atunci este valabilă a doua formulă a lui Green :*

$$\int_{D_n} [u(\mathbf{x})\,\Delta_n v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x})\,\Delta_n u(\mathbf{x})]\,d\mathbf{x} =$$

$$= \int_{\partial D_n} \left[u(\mathbf{x})\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \nu} - v(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu}\right] d\sigma. \qquad (3.38)$$

⌜ Demonstrația este, de asemenea, imediată ; în condițiile teoremei se poate scrie atît formula (3.37) cît și formula dedusă din (3.37) prin inversarea rolului funcțiilor u și v ; deoarece $(\nabla_n u(\mathbf{x}), \nabla_n v(\mathbf{x})) = (\nabla_n v(\mathbf{x}), \nabla_n u(\mathbf{x}))$, diferența acestor două identități, conduce la (3.38) .

Observație. Formula (3.38) nu este altceva decît identitatea lui Green atașată operatorului Δ_n ; deoarece $\Delta_n^+ = \Delta_n$, se verifică imediat identitatea lui Lagrange :

$$u\Delta_n v - v\Delta_n u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j} - v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

care conduce, prin integrare, direct la formula (3.38) ; formula (3.37) se poate obține de asemenea din descompunerea

$$u\Delta_n v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j},$$

ținînd seama de faptul că ultima sumă nu este altceva decît produsul scalar $(\nabla_n u, \nabla_n v)$

Formulele de reprezentare se obțin prin combinarea soluției elementare (3.31) cu formulele lui Green. Într-adevăr, deoarece avem $\Delta_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$, va rezulta egalitatea $\langle \Delta_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})\rangle = \langle \delta(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})\rangle = \varphi(0)$ valabilă pentru orice funcție continuă φ ; scriind $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ în loc de $\mathbf{x}$ și presupunînd $\mathbf{x}$ parametri și $\mathbf{y}$ variabile, vom putea scrie

$$\langle \Delta_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \varphi(\mathbf{y})\rangle = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \varphi(\mathbf{y})\rangle = \varphi(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x})$$

și deci avem egalitatea

$$\langle \Delta_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\ \varphi(\mathbf{y})\rangle = \varphi(\mathbf{x}). \qquad (3.38')$$

Scriind prima formulă a lui Green (3.37) pentru $v = \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, $u = \varphi$, presupunînd deci φ funcție de clasă $C^1(D_n)$, continuă în $\bar{D}_n$, obținem egalitatea

$$\int_{D_n} \varphi(\mathbf{y})\,\Delta_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,d\mathbf{y} + \int_{D_n} (\nabla_n \mathscr{E}(\mathbf{y}), \nabla_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}))\,d\mathbf{y} =$$

$$= \int_{\partial D_n} \varphi(\mathbf{y})\frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{y}}}\,d\sigma_{\mathbf{y}}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

care, în baza lui (3.38') [deoarece $\langle \Delta_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\ \varphi(\mathbf{y})\rangle = \int \varphi(\mathbf{y})\,\Delta_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,d\mathbf{y}$], se poate scrie sub forma

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \varphi(\mathbf{y})\frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{y}}}\,d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_{D_n} (\nabla_n \varphi(\mathbf{y}), \nabla_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}))\,d\mathbf{y}, \qquad (3.39)$$

dacă $\mathbf{x} \in D_n$ și sub forma

$$0 = \int_{\partial D_n} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \nu_\mathbf{y}} \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} - \int_{D_n} (\nabla_n \varphi(\mathbf{y}), \quad \nabla_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}))\, \mathrm{d}\mathbf{y}, \tag{3.39'}$$

dacă $\mathbf{x} \notin \bar{D}_n$, deoarece dacă supp $\varphi \subset D_n$ din (3.38) rezultă $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ pentru $\mathbf{x} \notin$ supp φ. Dacă $\mathbf{x} \in \partial D_n$, atunci în locul identităților (3.39) și (3.39') se utilizează identitatea

$$\frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \nu_\mathbf{y}} \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} - \int_{D_n} (\nabla_n \varphi(\mathbf{y}), \quad \nabla_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{3.39''}$$

care se justifică în diverse moduri; deoarece s-a utilizat teoria transformatei Fourier în deducerea lui $\mathscr{E}_n$, se știe că în cazul unei discontinuități de tipul salt, în acest punct de salt, valoarea funcției este egală exact cu $\frac{1}{2}[f(\mathbf{x}_0 +) + f(\mathbf{x}_0 -)]$. Or, pentru $\mathbf{x} \in D_n$ fiind valabilă identitatea (3.39) iar în cazul $\mathbf{x} \notin \bar{D}_n$ fiind valabilă identitatea (3.39'), rezultă că funcția

$$\int_{\partial D_n} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \nu_\mathbf{y}} \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} - \int_{D_n} (\nabla_n \varphi(\mathbf{y}), \quad \nabla_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}))\, \mathrm{d}\mathbf{y}$$

admite un salt de-a lungul lui ∂D_n și deci, pentru $\mathbf{x} \in \partial D_n$ trebuie să luăm $\frac{1}{2}[\varphi(\mathbf{x}) + 0] = \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x})$.

Teorema 3.9. (*de reprezentare a funcțiilor de clasă* C^1). *Dacă* u *este o funcție de clasă* C^1 *în* D_n *și de clasă* C^0 *în* $\bar{D}_n$ (*domeniul* D_n *fiind presupus mărginit și având frontieră suficient de regulată*), *este valabilă identitatea*

$$pu(\mathbf{x}) = \int_{D_n} (\nabla_n u(\mathbf{y}), \ \nabla_n^\mathbf{y} \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}))\, \mathrm{d}\mathbf{y} - \int_{\partial D_n} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \nu_\mathbf{y}} \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} \tag{3.40}$$

în care p *este funcția în scară definită prin*

$$p = \begin{cases} -1, & \text{dacă } \mathbf{x} \in D_n, \\ -\frac{1}{2}, & \text{dacă } \mathbf{x} \in \partial D_n, \\ 0, & \text{dacă } \mathbf{x} \notin \bar{D}_n. \end{cases} \tag{3.41}$$

⌜ Demonstrația rezultă direct din formula (3.39), (3.39'), (3.39''), prin schimbare de semn și prin înlocuirea lui φ prin u. ⌟

Teorema 3.10. (*de reprezentare a funcțiilor de clasă* C^2). *Dacă* u *este o funcție de clasă* $C^2(D_n)$ *și de clasă* $C^1(\bar{D}_n)$, *unde* D_n *are aceleași proprietăți ca și în teorema* 3.9, *atunci este valabilă identitatea*

$$pu(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu_\mathbf{y}} \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} - \int_{\partial D_n} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \nu_\mathbf{y}} \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} -$$

$$- \int_{D_n} \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \Delta_n u(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}, \tag{3.42}$$

p fiind definit prin (3.41).

⌜ Demonstrația este imediată: se înlocuiește în prima formulă a lui Green (3.37) v prin u și u prin $\mathscr{E}_n$; se obține identitatea

$$\int_{D_n} \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \Delta_n u(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{D_n} (\Delta_n^\mathbf{y} u(\mathbf{y}), \quad \nabla_n^\mathbf{y} \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}))\, \mathrm{d}\mathbf{y} =$$

$$= \int_{\partial D_n} \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu_\mathbf{y}} \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y},$$

din care dacă se extrage integrala $\int_{D_n} (\nabla_n^\mathbf{y} u(y), \ \Delta_n^\mathbf{y} \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}))\, \mathrm{d}\mathbf{y}$ și se înlocuiește în (3.40), se va obține exact formula (3.42). ⌟

Luînd în considerație identitatea (3.42), se observă că în baza expresiei (3.31) a soluției elementare, în afară de un termen de forma unui potențial de volum, exprimat prin integrala relativă la D_n în

identitatea în cauză mai apar două integrale de suprafață care depind de parametri și anume

$$v(\mathbf{x}) = \int_{S_1} \frac{\mu_1(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}}\, d\sigma_{\mathbf{y}},\quad w(\mathbf{x}) = \int_{S_2} \mu_2(\mathbf{y})\, \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n})\, d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad (3.38_1)$$

în care, s-a notat ∂D_n din (3.42) prin S_1 și S_2 respectiv. Aceste două integrale de suprafață se numesc *potențial de simplu strat*, respectiv *potențial de dublu strat*. Din cauza apariției acestor potențiali, identitatea (3.40) se mai numește *formula de reprezentare a funcțiilor de clasă C^1 prin potențiali* iar identitatea (3.42) se numește *formula de reprezentare a funcțiilor de clasă C^2 prin potențiali*.

Potențialii de volum, simplu și dublu strat joacă un rol important în rezolvarea problemelor la limită din teoria funcțiilor armonice. Studiul lor mai detaliat va fi efectuat ulterior.

Să observăm că soluția elementară (3.31) este o funcție armonică în $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (adică în întreg spațiul $\mathbb{R}^n$ exceptînd originea); într-adevăr, pentru $\mathbf{x} \neq 0$, $\mathscr{E}_n$ are sens,

$$\Delta_n \mathscr{E}_n(\mathbf{x}) = \Delta_n \left(-\frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \|\mathbf{x}\|^{2-n} \right) = -\frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \Delta_n \|\mathbf{x}\|^{2-n}$$

și se verifică imediat că

$$\Delta_n(\|\mathbf{x}\|^{2-n}) = 0,\quad n > 2,\ \mathbf{x} \neq 0.$$

3.3.3 Proprietăți elementare ale funcțiilor armonice. Funcții Green

Soluțiile ordinare ale ecuației lui Laplace, într-un domeniu $D_n \subset \mathbb{R}^n$ poartă denumirea de *funcții armonice în D_n*. În 3.3.2 am văzut că pentru $n > 2$, funcția $\|\mathbf{x}\|^{2-n}$ este o funcție armonică în tot spațiul exceptînd originea; se constată imediat că funcțiile (3.38_1) sînt funcții armonice în orice punct din $\mathbb{R}^n$, în afara domeniului de integrare corespunzător. Într-adevăr, vom putea scrie

$$\Delta_n v(\mathbf{x}) = \Delta_n \left(\int_{\partial D_n} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}\, \mu_1(\mathbf{y})\, d\sigma_{\mathbf{y}} \right) = \int_{\partial D_n} (\Delta_n \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) \mu_1(\mathbf{y})\, d\sigma_{\mathbf{y}} = 0,$$

dacă $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \partial D_n$,

$$\Delta_n w(\mathbf{x}) = \Delta_n \left(\int_{\partial D_n} \mu_2(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n} d\sigma_{\mathbf{y}} \right) = \int_{\partial D_n} \mu_2(\mathbf{y}) \Delta_n^{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n} \right) d\sigma_{\mathbf{y}}$$

și deoarece $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}$ este o funcție indefinit derivabilă dacă $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, vom avea

$$\Delta_n^{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) = \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} (\Delta_n^{\mathbf{x}} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n})) = 0.$$

Așadar, dacă $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, deci dacă $\mathbf{x} \notin \partial D_n$, vom avea $\Delta_n w(\mathbf{x}) = 0$. De asemenea și potențialul de volum (3.35) este funcție armonică în afara lui D_n:

$$\Delta_n V(\mathbf{x}) = \Delta_n \left(\int_{D_n} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n} \mu(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right) = \int_{D_n} \mu(\mathbf{y})\, \Delta_n^{\mathbf{x}} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n})\, d\mathbf{y} = 0,$$

dacă $\mathbf{x} \notin \bar{D}_n$ și dacă notăm $\mu = F$.

Prin urmare, există funcții armonice, oricare ar fi domeniul $D_n \subset \mathbb{R}^n$ Este evident că mulțimea funcțiilor armonice în D_n formează un *spațiu vectorial*: într-adevăr, dacă $\Delta_n u_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$ iar dacă C_j sînt constante reale, vom avea.

$$\Delta_n \left(\sum_{j=1}^{k} C_j u_j(\mathbf{x}) \right) = \sum_{j=1}^{k} C_j \Delta_n u_j(\mathbf{x}) = 0$$

dacă se ține seama de liniaritatea operatorului lui Laplace.

Teorema 3.11. (*Gauss*). *Dacă u este o funcție armonică în D_n, iar S este o suprafață oarecare $(n-1)$-dimensională închisă din D_n, astfel încît perechii (D_S, S), D_S fiind domeniul care are ca frontieră pe S, i se poate aplica teorema flux-divergență, este valabilă relația integrală*

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = 0; \quad (3.39_1)$$

reciproc, dacă egalitatea (3.39) are loc pentru orice S definit ca mai sus și pentru o funcție de clasă C^2 în D_n, atunci u este o funcție armonică în D_n.

⌐ Dacă în formula (3.37) se inversează rolurile lui u și v și se ia $v = 1$, se obține identitatea

$$\int_{D_n} \Delta_n u(\mathbf{x})\, dx = \int_{\partial D_n} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma, \quad (3.40_1)$$

valabilă pentru orice funcție $u \in C^2(D_n)$. Dacă în (3.40_1) se ia $\partial D_n = S$, deoarece $\Delta_n u = 0$, se obține (3.39_1). Invers, dacă (3.39_1) este valabil pentru $u \in C^2(D_n)$ și pentru orice $S \subset D_n$, vom obține relația

$$\int_{D_S} \Delta_n u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Dacă $\Delta_n(u(\mathbf{x}_0)>0$ pentru un $\mathbf{x}_0\in D_n$, deoarece $\Delta_n u(x)\in C^0(D_n)$, vom avea $\Delta_n u(\mathbf{x})>0$ într-o vecinătate V_{x_0} a punctului $\mathbf{x}_0$ și deci $\int\limits_{V_{x_0}}\Delta_n u(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}>0$, ceea ce nu este posibil căci se poate lua $D_S=V_{x_0}$. Dacă $\Delta_n u(\mathbf{x}_0)<0$, se poate obține din nou o contradicție. ⌟

Observație. Dacă $u(\mathbf{x})\in C^1(\bar{D}_n)$, iar ∂D_n este suficient de regulată, relația (3.39_1) rămîne valabilă și la limită pentru $S=\partial D_n$, adică este valabilă relația

$$\int\limits_{\partial D_n}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma=0, \tag{3.39'}$$

Teorema 3.12. *Dacă* $u\in C^2(D_n)$ *și* $u\in C^1(\bar{D}_n)$, *iar* $\Delta_n u(\mathbf{x})=0$ *pentru* $\mathbf{x}\in D_n$, *atunci, dacă* $u(\mathbf{x})|_{\partial D_n}=0$, *rezultă* $u(\mathbf{x})=0$ *în* D_n *iar dacă* $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial D_n}=0$, *rezultă* $u(\mathbf{x})=\text{const}$ *în* D_n.

⌜ Vom folosi din nou formula (3.37) în care vom pune $u=v$; se obține o nouă relație integrală

$$\int\limits_{D_n}u(\mathbf{x})\,\Delta_n(u(\mathbf{x})\,dx+\int\limits_{D_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right]d\mathbf{x}=\int\limits_{\partial D_n}u(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu}\,d\sigma, \tag{3.41}$$

deoarece

$$(\nabla_n u,\nabla_n u)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2.$$

Dacă u este o funcție armonică în D_n, nulă pe ∂D_n, din (3.31) va rezulta egalitatea

$$\int\limits_{D_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right]d\mathbf{x}=0, \tag{3.41'}$$

care este posibilă numai dacă $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=0$, $j=1,2,\ldots,n$, în D_n, deci dacă u este constant în D_n; deoarece $u\in C^1(\bar{D}_n)$, iar $u|_{\partial D_n}=0$, rezultă $u=0$ în D_n.

Dacă funcția armonică u verifică pe ∂D_n relația $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0$, din (3.41) va rezulta din nou (3.41'). și deci u este constantă în D_n; în acest caz nu se mai poate scoate concluzia $u=0$ în D_n. ⌟

Teorema 3.12 este deosebit de importantă pentru teoria functiilor armonice; din această teoremă rezultă că dacă pe frontiera domeniului D_n se dau valorile unei funcții armonice, deci dacă $u(\mathbf{x})|_{x\in\partial D_n}=f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})\in C^1(D_n)$, atunci, cu aceste valori, funcția armonică este unic determinată. Se poate formula definiția următoare:

Prin *problema Dirichlet interioară pentru ecuația* $\Delta_n u=0$ *în domeniul* D_n *se înțelege determinarea unei funcții armonice în* D_n, *continuă în* $\bar{D}_n$ *în care ia valori continue date pe* ∂D_n: $u|_{\partial D_n}=f$, $f\in C^0(\partial D_n)$.

Trebuie menționat că domeniul D_n se presupune *mărginit*, iar spre deosebire de cazul anterior, u nu se presupune de clasă C^1 pe $\bar{D}_n$, ci doar continuu: se face ipoteza $u(\mathbf{x})\in C^1(\bar{D}_n)$ deoarece am folosit formula lui Green (3.37) dar această ipoteză nu este esențială. Rezultă deci, contrar cu teoria generală a ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea, că este suficientă cunoașterea *unei singure date* pentru a se determina în mod unic soluția respectivă, dacă această *dată* este funcția f din definiția anterioară. Acest fapt se poate explica prin aceea că ecuația $\Delta_n u=0$ este de tip eliptic și deci avem o condiție în plus atașată ecuației în cauză (forma caracteristică este definită) și, de asemenea prin aceea că problema Dirichlet interioară este o problemă globală (se determină soluția într-un domeniu), pe cînd problema Cauchy din teorema de existență și unicitate Cauchy-Kovalevskaia este o problemă locală (se determină soluția în vecinătatea varietății care poartă datele).

În ceea ce privește *problema Cauchy pentru ecuația Laplace*, deși aceasta se poate pune pentru orice varietate $(n-1)$-dimensională (deoarece varietățile caracteristice ale acestei ecuații sînt imaginare), ea *nu este corect pusă*, fapt scos în evidență de J. Hadamard. De aici rezultă că problema Cauchy nu este corect pusă pentru ecuațiile de tip eliptic (ecuația Laplace fiind un caz particular de ecuație de tip eliptic.) Pentru a ne convinge de necorectitudinea problemei Cauchy pentru ecuația Laplace, vom considera următoarea problemă Cauchy:

$$u(x_1,\ldots,x_n)|_{x_n=0}=\frac{1}{k^2}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{n-1}}(x_1+\ldots+x_{n-1})\right],$$

$$\left.\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}=\frac{1}{k}\cos\left[\frac{k}{\sqrt{n-1}}(x_1+\ldots+x_{n-1})\right];$$

unde k este o constantă pozitivă suficient de mare: soluția acestei probleme Cauchy, după cum se verifică imediat, este dată în funcția

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{k^2} e^{kx_n} \cos\left[\frac{k}{\sqrt{n-1}}(x_1 + \ldots + x_{n-1})\right];$$

deci $u|_{x_n=0}$ și $\left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}$ tind la zero cînd $k\to\infty$, dar $u\not\to 0$ cînd $k\to\infty$, ceea ce arată că soluția nu depinde continuu de datele inițiale (deci nu este stabilă); dacă ar depinde continuu, ar trebui ca $u \to 0$ cînd u și $\frac{\partial u}{\partial x_n} \to 0$ pentru $x_n = 0$.

În afară de problema Dirichlet interioară, pentru ecuația Laplace vom mai definit două probleme la limită.

Prin *problema Neumann interioară pentru ecuația Laplace* se înțelege găsirea soluției acestei ecuații, de clasă $C^1(\bar{D}_n)$, care este astfel încît $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial D_n} = g$, $g \in C^0(\partial D_n)$.

Prin *problema mixtă interioară pentru ecuația Laplace* se înțelege găsirea funcției armonice, de clasă $C^1(\bar{D}_n)$, astfel încît $\left[a(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]_{\partial D_n} = h(\mathbf{x})$, $h(\mathbf{x}) \in C^0(\partial D_n)$, a și b fiind funcții cunoscute pe ∂D_n, astfel încît $|a| + |b| > 0$.

Problemele Dirichlet, Neumann și mixtă interioare pentru ecuația Laplace se mai numesc și *prima*, *a doua* și respectiv *a treia problemă la limită interioară* pentru ecuația în cauză.

Este evident că problema mixtă interioară conține atît problema Dirichlet (care se obține pentru $a = 1$ și $b = 0$ pe ∂D_n, $h = f$), cît și problema Neumann interioară (care se obține pentru $a = 0$ și $b = 1$, $h = g$ pe ∂D_n).

În afară de aceste probleme la limită interioară se pot defini și *probleme la limită exterioară* (respectiv *problema Dirichlet*, *problema Neumann* și *problema mixtă exterioară*), în care caz domeniul mărginit D_n se înlocuiește printr-un domeniu nemărginit, de exemplu exteriorul lui D_n față de $\mathbb{R}^n$; de data aceasta însă trebuie impuse și condiții de regularitate la infinit. Asupra acestor probleme vom reveni însă ulterior.

Revenind la problema Dirichlet interioară, unicitatea ei rezultă direct din teorema 3.12 dacă presupunem în plus $u \in C^1(\bar{D}_n)$, deoarece dacă ar exista două soluții care iau aceleași valori pe ∂D_n, diferența lor,

care este iarăși o funcție armonică, va avea valori nule pe ∂D_n și deci este nulă în $\bar{D}_n$.

Spre deosebire de problema Dirichlet interioară, problema Neumann interioară nu admite soluții unice, deoarece din teorema 3.11 va rezulta că dacă u_1 și u_2 sînt soluții ale aceleiași probleme Neumann interioare, vom avea $u_1 = u_2 + C$, C fiind o constantă oarecare. În plus, în baza unei observații, problema Neumann interioară nu va admite soluții, oricare ar fi $g \in C^0(\partial D_n)$; funcția g va fi obligată să verifice și relația $\int_{\partial D_n} g(\mathbf{x})\,d\sigma = 0$; vom vedea ulterior că această condiție este și suficientă pentru existența unei soluții pentru problema Neumann interioară.

În ceea ce privește problema mixtă interioară, dacă a și b sînt funcții continue nenule pe ∂D_n, din relația (3.41) va rezulta imediat unicitatea soluției, înlocuind, de exemplu, în integrala calculată pe ∂D_n, pe u prin $-\frac{b}{a}\frac{\partial u}{\partial \nu}$, în ipoteza $\frac{b}{a} > 0$; într-adevăr, din (3.41) va rezulta

$$\int_{D_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 d\mathbf{x} = -\int_{\partial D_n}\frac{b(\mathbf{x})}{a(\mathbf{x})}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma < 0,\right.$$

ceea ce nu este posibil decît dacă u este constantă în D_n; or atunci pe ∂D_n avem $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ și va rezulta $u = 0$ pe $\partial D_n (a \neq 0)$, deci $C = 0$ (trebuie ținut seama că u în această demonstrație coincide cu diferența a două soluții corespunzînd acelorași date într-o problemă mixtă interioară).

Observație. Toate teoremele de unicitate demonstrate pentru aceste probleme la limită pentru ecuația lui Laplace sînt evident valabile și pentru ecuația lui Poisson $\Delta_n u = F$, deoarece diferența a două soluții ale acestei ecuații verifică ecuația lui Laplace (adică este o funcție armonică); pentru problema lui Neumann interioară, din (3.40) se deduce și condiția de compatibilitate

$$\int_{D_n} F(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\partial D_n} g(\mathbf{x})\,d\sigma.$$

Teorema 3.14. (*de medie Gauss*). *Media sferică a oricărei funcții armonice pe orice sferă complet interioară domeniul de armonicitate este egală cu valoarea funcției armonice în centrul sferei.*

⌜ Demonstrația acestei teoreme se poate realiza cu ajutorul formulei de reprezentare (3.42), în care vom presupune $D_n = B_r(\mathbf{x})$, și deci $\partial D_n = S_r(\mathbf{x})$ Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) = (2-n)\, r^{1-n}$$

pe sfera $S_r(\mathbf{x})$, folosind teorema 3.11, expresia soluției elementare și faptul că $p = 1$, vom obține

$$(n-2)\,\omega_n u(\mathbf{x}) = r^{2-n}\int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=r}\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu}\,d\sigma - (2-n)\,r^{1-n}\int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=r} u(\mathbf{y})\,d\sigma =$$

$$=(n-2)\,\omega_n M_r^{\mathbf{x}}[u(\mathbf{x})],$$

de unde rezultă teorema de medie enunțată : $u(\mathbf{x}) = M_r^{\mathbf{x}}[u]$. ⌟

Formula de reprezentare (3.42) permite deducerea soluției formale pentru problema Dirichlet interioară, în ipoteza că valorile pe frontieră sînt derivabile. Într-adevăr, scriind această formulă în ipoteza că u este o funcție armonică în D_n iar $\mathbf{x} \in D_n$, se obține identitatea

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} u(\mathbf{y})\frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \nu_{\mathbf{y}}}\,d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_{\partial D_n}\mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu_{\mathbf{y}}}\,d\sigma_{\mathbf{y}} \qquad (3.42)$$

și deoarece valorile lui u pe ∂D_n determină unic funcția armonică în D_n care are aceste valori pe frontieră, rezultă că valorile derivatei după direcția normalei la ∂D_n sînt inutile. Pentru a obține o formulă care să exprime pe u numai prin valorile sale pe frontiera domeniului de armonicitate, vom scrie a doua formulă a lui Green în ipoteza că v este o altă funcție armonică în D_n de clasă C^1 în $\bar{D}_n$, deocamdată nedeterminată, iar u este soluția căutată a problemei Dirichlet ; se obține identitatea

$$0 = \int_{\partial D_n} u(\mathbf{y})\frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial \nu}\,d\sigma - \int_{\partial D_n} v(\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu}\,d\sigma,$$

care, adunată la identitatea (3.42), conduce la o nouă identitate

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} u(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}}\left[\mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + v(\mathbf{y})\right]d\sigma - \int_{\partial D_n}\left[\mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})+v(\mathbf{y})\right]\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu}\,d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Pentru a face să dispară integrala care conține termenul necunoscut $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ este suficient să determinăm funcția armonică v din condiția

$$v(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}\in\partial D_n} = -\mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})|_{\mathbf{y}\in\partial D_n}, \qquad (3.44)$$

ceea ce face să obținem formula

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} f(\mathbf{y})\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \nu_{\mathbf{y}}}\,d\sigma_{\mathbf{y}}, \qquad (3.45)$$

dacă notăm

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + v(\mathbf{y}) \qquad (3.46)$$

și dacă ținem seama de condiția la limită $u|_{\partial D_n} = f$. În acest mod s-a demonstrat teorema următoare :

Teorema 3.15. *Soluția formală a problemei Dirichlet interioare în care datele la frontieră sînt derivabile este dată de formula* (3.45).

Funcția G dată prin relația (3.46), în care funcția armonică v se determină din condiția (3.44), se numește *funcția Green pentru problema Dirichlet interioară.*

Recapitulînd, rezultă că funcția Green pentru problema Dirichlet interioară pentru domeniul D_n este suma dintre soluția elementară a ecuației Laplace și o funcție armonică în D_n care pe ∂D_n ia valori date, ceea ce face ca funcția Green să fie nulă cînd $\mathbf{x} \in D_n$ și $\mathbf{y} \in \partial D_n$. Așadar, funcția Green este o funcție armonică în $D_n \setminus \{\mathbf{x}\}$, nulă pe ∂D_n.

Deși funcția Green (3.46) se determină cu ajutorul problemei Dirichlet (3.44), totuși folosirea acestei funcții este avantajoasă deoarece aceasta permite rezolvarea oricărei probleme Dirichlet (cel puțin formal) cu ajutorul relației (3.45), iar problema Dirichlet (3.44) este mai simplă, valorile pe ∂D_n fiind indefinit derivabile ; în plus, în cazuri particulare, funcția Green se poate determina elementar (după cum vom constata imediat în cazul sferei).

Deoarece în problema Dirichlet (3.44) valorile la frontieră depind și de parametrii $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, este natural să presu-

punem că și funcția v va depinde și de parametrii $\mathbf{x}$, deci $v = v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{D}_n$.

Formula (3.43) poate fi folosită și la rezolvarea problemei Neumann interioare; pentru aceasta este suficient să se determine funcția armonică v din condiția $\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial D_n} = -\left.\frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \nu_{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}\in\partial D_n}$ (deci tot printr-o problemă Neumann, dar mult mai simplă).

În formula (3.45), dedusă în ipoteza $f \in C^1(\partial D_n)$, este vizibil că se poate presupune $f \in C^0(\partial D_n)$ deoarece integralele de suprafață au sens facă integrandul este o funcție continuă pe suprafața considerată (în ipoteza că funcția Green este găsită vom avea $\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} \in C^0(\partial D_n)$ deoarece $\mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \in C^\infty$ cînd $\mathbf{x} \in D_n$ și $\mathbf{y} \in \partial D_n$, iar $v \in C^1(\bar{D}_n)$).

Teorema 3.16. *Orice funcție armonică este indefinit derivabilă în domeniul ei de armonicitate.*

⌐ Demonstrația este imediată, ea rezultînd din formula (3.42) de reprezentare a oricărei funcții armonice prin suma a doi potențiali; unul de dublu strat și altul de simplu strat; dar, deoarece, dacă $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, funcția $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}$ este indefinit derivabilă (și armonică), rezultă că dacă $\mathbf{x} \in D_n$, avem $u \in C^\infty(\bar{D}_n)$.

3.3.4. Problema Dirichlet pentru sferă

Vom folosi formula (3.45) pentru a rezolva problema Dirichlet interioară pentru o sferă de rază R, cu centrul într-un punct O din $\mathbb{R}^n$. Pentru aceasta, fie $\mathbf{x}$ coordonatele unui punct oarecare P din interiorul sferei pe care-l vom considera fix și fie $\mathbf{y}$ coordonatele unui punct variabil Q din $D_n = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| \leqslant R\}$, $\mathbf{z}$ fiind coordonatele lui O.

Cu ajutorul dreptei care conține segmentul OP și al punctului Q (care evident fiind arbitrar în sferă va putea fi presupus exterior acestei drepte) se poate construi un plan (bidimensional) a cărui intersecție cu sfera $\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| = R$ va fi un cerc cu centrul în O și de rază R; fie $\mathbf{x}'$ coordonatele inversului *) P' lui P față de acest cerc,

*) Uneori se mai spune că P' este simetricul sau conjugatul armonic al punctului P față de sfera $\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| = R$.

adică, dacă vom nota

$$\rho = \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|,\ \rho' = \|\mathbf{x}'-\mathbf{z}\|,\ r = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,\ r' = \|\mathbf{x}'-\mathbf{y}\|, \tag{3.47}$$

punctul $P'(\mathbf{x}')$ se va afla pe dreapta OP, de aceeași parte a semidreptei OP ca și punctul P, situat la distanța ρ' față de O, iar ρ și ρ' verifică relația $\rho \cdot \rho' = R^2$. Dacă punctul Q se află pe sferă, triunghiurile OPQ și $OP'Q$ vor fi asemenea deoarece au unghiul din O comun, iar laturile adiacente acestui unghi sînt proporționale căci $\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho'}$. Rezultă că se mai poate scrie încă un raport egal în valoare cu rapoartele precedente și deci avem egalitățile (vezi fig. 3.1)

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho'} = \frac{r}{r'}. \tag{3.48}$$

Așadar, cînd $\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| = R$, vom putea scrie egalitatea $\frac{1}{r} = \frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r'}$ sau, ceea ce este tot una:

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}} - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2}\frac{1}{\|\mathbf{x}'-\mathbf{y}\|^{n-2}} = 0 \tag{3.49}$$

Prin urmare, considerînd funcția

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2}\frac{1}{\|\mathbf{x}'-\mathbf{y}\|^{n-2}}, \tag{3.50}$$

se verifică una din proprietățile funcției Green: dacă $\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| = R$ $G = 0$ deoarece are loc relația (3.49). Pentru a putea afirma că funcția G definită prin relația (3.49) este într-adevăr funcția Green pentru interiorul sferei $\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| = R$, este suficient să arătăm că termenul $\frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2}\frac{1}{\|\mathbf{x}'-\mathbf{y}\|^{n-2}}$ este o funcție armonică dacă $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| < R$, considerată ca funcție de $\mathbf{y}$: or pentru aceasta este suficient să arătăm că $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}'$ dacă $\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| \leqslant R$ (deoarece funcția $\|\mathbf{x}\|^{2-n}$ este o funcție armonică în exteriorul originii); dar, prin definiție, avem $\|\mathbf{x}'-\mathbf{z}\| > R$ punctul P' fiind inversul lui P care este situat în sferă). Așadar, putem considera ca demonstrată teorema următoare:

Teorema 3.17. *Funcția Green pentru problema Dirichlet interioară pentru sferă este dată de relația (3.50).*

Pentru a găsi formula efectivă de rezolvare a problemei Dirichlet interioară pentru sferă, va trebui să calculăm derivata $\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu_y}$ pe sfera $\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = R$; vom avea

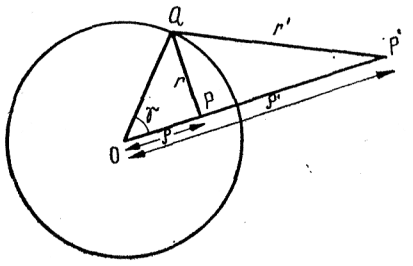

Fig. 3.1.

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu_y} = \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \nu_y} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n} +$$

$$+ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \nu_y} \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}\|^{-2n} =$$

$$= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \frac{\partial(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{\partial \nu_y} - \frac{r'^{1-n}}{\omega_n} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2} \frac{\partial(\|\mathbf{x}'-\mathbf{y}\|)}{\partial \nu_y},$$

dacă derivăm conform cu formula de derivare a funcțiilor compuse și ținem seama de notațiile (3.47); dar se verifică imediat relațiile

$$\frac{\partial(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{\partial \nu_y} = \cos(\nu_y, r), \frac{\partial(\|\mathbf{x}'-\mathbf{y}\|)}{\partial \nu_y} = \cos(\nu_y, r')$$

[deoarece $\frac{\partial(\|\mathbf{x}\|)}{\partial \nu_y} = \frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|}\nu_1 + \ldots + \frac{x_n}{\|\mathbf{x}\|}\nu_n = (\text{grad}(\|\mathbf{x}\|), \nu_y) =$
$= \|\text{grad}(\|\mathbf{x}\|)\| \|\nu_y\| \cos(\nu_y, r_1) = \cos(\nu_y, r_1)$, r_1 fiind dirijat după segmentul Ox]. Deci avem

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu_y} = \frac{1}{\omega_n} r^{1-n} \cos(\nu_y, r) + \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{R}{r}\right)^{2-n} r'^{1-n} \cos(\nu_y, r');$$

dar, dacă $\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = R$, din triunghiurile OPQ și $OP'Q$ (vezi fig. 3.1), cu ajutorul teoremei lui Pitagora generalizate se pot exprima valorile lui $\cos(\nu_y, \mathbf{r})$ și $\cos(\nu_y, \mathbf{r}')$ cu ajutorul lui r, ρ și R, dacă utilizăm și egalitățile (3.48). Astfel vom avea

$$\cos(\nu_y, \mathbf{r}) = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}, \cos(\nu_y, \mathbf{r}') = \frac{R^2 + r'^2 - \rho'^2}{2Rr'} = \frac{\rho^2 + r^2 - R^2}{2r\rho}$$

și prin înlocuire în (3.51) se va obține

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu_y} = \frac{1}{\omega_n} r^{2-n} \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr} +$$

$$+ \frac{1}{\omega_n} \frac{R^{n-2}}{\rho^{n-2}} \frac{R^{1-n} r^{1-n}}{\rho^{1-n}} \frac{\rho^2 + r^2 - R^2}{2r\rho} = \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R r^n}.$$

Ținînd seama de notațiile (3.47) și de formula (3.45), se obține formula finală

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|=R} \frac{(R^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2) f(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n} \, d\sigma_y, \tag{3.52}$$

numită *formula lui Poisson pentru sferă*. Așadar, se poate enunța

Teorema 3.18. *Soluția formală a problemei Dirichlet interioare pentru sferă este exprimată prin formula lui Poisson pentru sferă* (3.52).

Folosind coordonatele sferice și exprimînd în triunghiul OPQ, latura QP cu ajutorul teoremei lui Pitagora generalizată, formula lui lui Poisson (2.52) se mai poate scrie și sub forma echivalentă:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|=R} \frac{(R^2 - \rho^2) f(\mathbf{y}) d\sigma_y}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\gamma)^{n/2}}, \tag{3.52'}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \rho\boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{z} + R\boldsymbol{\alpha}',$$

unde γ este unghiul format de semidreptele OP și OQ, $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \|\boldsymbol{\alpha}'\| = 1$.

Cu ajutorul formulei lui Poisson (3.52) se poate redemonstra imediat teorema 3.13 de medie; pentru aceasta nu avem decît, în formula (3.52), să presupunem $\mathbf{z} = \mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ find centrul unei sfere din domeniul de armonicitate al funcției u, și deci $f(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y})$; vom obține

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|=R} \frac{R^2 u(\mathbf{y})}{R^n} \, d\sigma_y = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=R} u(\mathbf{y}) d\sigma_y = M_r^{\mathbf{x}}[u],$$

deoarece $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = R$ și $\mathbf{z} = \mathbf{x}$.

Formula (3.52) introduce în studiu o funcție specială

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\omega_n R} \frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n},$$

numită *nucleul lui Poisson pentru sferă*; cu ajutorul acestui nucleu, formula (3.52) se poate scrie și sub forma următoare:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|=R} K(\mathbf{x} - \mathbf{y},\ \mathbf{y} - \mathbf{z})\, f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\sigma_y\,, \qquad (3.52'')$$

În viitor, pentru ușurința calculelor, vom presupune $z = 0$, adică sfera are centrul în origine (fapt realizabil totdeauna cu ajutorul unei translații).

Să găsim acum unele proprietăți ale nucleului lui Poisson.

Teorema 3.19. *Sînt valabile următoarele propoziții:*

a) $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$, *dacă* $\|\mathbf{x}\| < R$ *și* $\|\mathbf{y}\| = R$;

b) $\Delta_n^{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, *dacă* $\|\mathbf{x}\| < R$ *și* $\|\mathbf{y}\| = R$;

c) $\int_{\|\mathbf{y}\|=R} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\sigma_y = 1$, *dacă* $\|\mathbf{x}\| < \mathrm{R}$.

⌐ Propoziția *a*) este evidentă, deoarece în ipotezele făcute avem $R^2 - \|\mathbf{x}\|^2 > 0$ și și $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > 0$.

Pentru a demonstra propoziția *b*), vom observa că dacă $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este o funcție indefinit derivabilă, deci se pot calcula derivatele de orice ordin dorim; efectuînd calcule, obinem imediat:

$$\frac{\partial^2 K(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j^2} = \frac{1}{\omega_n R} [-2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-n} + n\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-n-2}(4x_j(x_j -$$

$$- y_j) - (R^2 - \|\mathbf{x}\|^2)) + n(n+2)(R^2 - \|\mathbf{x}\|^2)(x_j - y_j)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-n-2},$$

și deci, prin însumare, se găsește

$$\omega_n R\, \Delta_n K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2n\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n + n\|\mathbf{x} - \mathbf{y})^{-n-2}(4\|\mathbf{x}\|^2 -$$

$$-4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - n(R^2 - \|\mathbf{x}\|^2)) + n(n+2)(R^2 - \|\mathbf{x}\|^2)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-n-2} =$$

$$= -2n\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-n} + 2n\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-n-2}(\|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + R^2) =$$

$$= 2n\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-n-2}(\|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + R^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2).$$

Or, deoarece $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, iar $\|\mathbf{y}\| = R$, rezultă,

$$\Delta_n K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

În sfîrșit, pentru a demonstra propoziția c), vom folosi relația următoare:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \nu_y},$$

în care vom înlocui funcția Green prin expresia sa (3.50); vom găsi

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \nu_y} + \frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2} \frac{\partial}{\partial \nu_y}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{y}\|)^{n-2}}\right)$$

și deci

$$\int_{\|\mathbf{y}\|=R} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathrm{d}\sigma_y = \int_{\|\mathbf{y}\|=R} \frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \nu_y}\, \mathrm{d}\sigma_y\,,$$

deoarece în sfera $\|\mathbf{y}\| < R$ funcția $\|\mathbf{x}' - \mathbf{y}\|^{2-n}$ este armonică și conform cu teorema lui Gauss integrala ei pe sferă va fi nulă; pe de altă parte, din formula de reprezentare (3.40), făcînd $u = 1$ și deoarece $\|\mathbf{x}\| < R$ avem $p = -1$, va rezulta în definitiv:

$$\int_{\|\mathbf{y}\|=R} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathrm{d}\sigma_y = \int_{\|\mathbf{y}\|=R} \frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \nu_y}\, \mathrm{d}\sigma_y = 1.$$

Teorema 3.20 (*sinteza formulei lui Poisson*). *Formula lui Poisson* (3.52), *în care f este o funcție continuă pe sfera* $\|\mathbf{y}\| = R$, *reprezintă efectiv soluția problemei Dirichlet interioară pentru sferă.*

⌐ Demonstrația se face în două etape: întîi vom arăta că u dat de această formulă este o funcție armonică în sferă, iar apoi vom arăta că dacă $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, $\|\mathbf{x}_0\| = R$, atunci $u(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x}_0)$.

Pentru prima etapă, demonstrația este imediată; deoarece $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^\infty$ cînd $\|\mathbf{x}\| < R$ și $\|\mathbf{y}\| = R$ relația (3.52) scrisă sub K forma (3.52'') (cu $\mathbf{z} = 0$) poate fi derivată direct sub semnul integral. Vom obține

$$\Delta_n u(\mathbf{x}) = \Delta_n\left(\int_{\|\mathbf{y}\|=R} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\sigma_y\right) = \int_{\|\mathbf{y}\|=R} [\Delta_n^{\mathbf{y}} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})]\, f(\mathbf{y})\mathrm{d}\sigma_y = 0$$

dacă folosim propoziția *b*) de la teorema 3.19

Pentru etapa a doua vom evalua diferența $u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ în ipoteza că $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ pe un drum oarecare din interiorul sferei; fără a micșora generalitatea, putem presupune că $\mathbf{x}$ tinde către $\mathbf{x}_0$, pe raza corespunzătoare acestui punct. Într-adevăr, fie $\mathbf{x}$ suficient de apropiat de sferă și $\mathbf{x}_0$ și $\mathbf{x}_1$ două puncte pe sferă $\mathbf{x}_0$ fiind situat la capătul razei Ox, iar (vezi fig. 3.2) $\mathbf{x}_1$ situat la capătul drumului pe care x tinde către sferă; vom avea

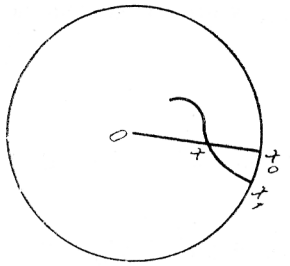

Fig. 3.2.

$$|u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_1)| \leqslant |u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| +$$

$$+ |f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_1)| < \varepsilon + |u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|.$$

Deoarece $f(\mathbf{y}) \in C^0(\|\mathbf{y}\| = R)$, pentru $\|\mathbf{x}\|$ suficient de apropiat de R vom avea și $\mathbf{x}_1$ suficient de apropiat de $\mathbf{x}_0$ și deci $|f(\mathbf{x})_0 - f(\mathbf{x}_1)| < \varepsilon$.

Pentru a evalua diferența $u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ vom folosi propoziția c) de la teorema 3.18:

$$u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \int\limits_{\|\mathbf{y}\|=R} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, f(\mathbf{y}) \mathrm{d}\sigma_y - f(\mathbf{x}_0). \int\limits_{\|\mathbf{y}\|=R} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathrm{d}\sigma_y =$$

$$= \int\limits_{\|\mathbf{y}\|=R} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, [f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0)]\, \mathrm{d}\sigma_v = \int\limits_{S_1} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, [f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0)]\, \mathrm{d}\sigma_y +$$

$$+ \int\limits_{S_2} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, [f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0)]\, \mathrm{d}\sigma_y,$$

unde S_1 și S_2 sînt porțiuni disjuncte de pe sfera $\|\mathbf{y}\| = R$ astfel încît $S_1 \cup S_2 = S_R(\mathbf{x})$ iar S_1 este astfel ales în vecinătatea lui x_0 încît oricare ar fi $\mathbf{x} \in S_1$ să avem $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon/2$, lucru posibil, deoarece funcția f este continuă pe $S_R(\mathbf{x})$; în plus, ε poate fi ales independent de x_0 deoarece este și uniform continuă (fiind continuă pe un compact). Vom obține

$$|u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leqslant \int\limits_{S_1} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0)|\, \mathrm{d}\sigma_y +$$

$$+ \int\limits_{S_2} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, [|f(\mathbf{y})| + |f(\mathbf{x}_0)|]\, \mathrm{d}\sigma_y < \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{S_2} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathrm{d}\sigma_y +$$

$$+ 2M \int\limits_{S_2} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathrm{d}\sigma_y < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \int\limits_{S_2} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathrm{d}\sigma_y,$$

dacă folosim propozițiile *a)* și *c)* din teorema 3.18, ceea ce face să avem

$$\int\limits_{S_1} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathrm{d}\sigma_y < \int\limits_{\|\mathbf{y}\|=R} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\sigma_y = 1$$

și faptul că $|f| \leqslant M$. Teorema va fi demonstrată dacă reușim să arătăm că $\int\limits_{S_2} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\sigma_y < \dfrac{\varepsilon}{4M}$ cînd $\|\mathbf{x}\| \to R$; or, folosind expresia care rezultă din formula (3.52′) pentru nucleul lui Poisson, vom avea

$$\int\limits_{S_2} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\sigma_y = \frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_2} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{(R^2 + \|\mathbf{x}\|^2 - 2R\|\mathbf{x}\|\cos\gamma)^{n/2}}$$

și deoarece $\mathbf{x}$ este în vecinătatea lui $\mathbf{x}_0$, vom avea sigur $\cos\gamma \neq 1$ (reamintim că γ este unghiul format de segmentele OP și OQ și deoarece $\mathbf{y} \in S_2$, direcția OP nu va putea coincide cu direcția OQ, $\mathbf{x}_0$ fiind pe S_1), ceea ce face ca numitorul integrandului să fie diferit de zero pentru orice $\mathbf{y} \in S_2$; deci integrala va fi finită și deoarece cînd $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, avem $\|\mathbf{x}\| \to R$, rezultă că $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$, convergența fiind uniformă. ⌟

Formula lui Poisson pentru sferă (3.52) este una din formulele fundamentale pentru teoria funcțiilor armonice, din ea decurgînd unele consecințe importante pentru aceste funcții. În continuare vom stabili cîteva din aceste consecințe.

Teorema 3.21. *Orice șir de funcții armonice în D_n, uniform convergent în D_n, converge către o funcție armonică.*

⌜ Fie $(u_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ șirul în cauză; acesta va fi evident uniform convergent pe orice sferă complet interioară lui D_n și pe această sferă va converge către o funcție continuă $u(\mathbf{x})$; cu valorile $u_m(\mathbf{x})$ de pe sfera dată se pot defini valorile lui $u_m(\mathbf{x})$ în sfera dată, cu ajutorul formulei lui Poisson; deci

$$u_m(\mathbf{x}) = \int\limits_{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|=R} K(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{z})\, u_m(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}$$

și trecînd la limită, pentru $m \to \infty$, $u_m(\mathbf{x})$ va tinde în sferă către o funcție continuă, care va fi reprezentată în această sferă prin formula

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|=R} K(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{z})\, u(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\sigma_y,$$

care reprezintă, conform cu teorema 3.19, o funcție armonică în sferă (convergența uniformă a șirului a fost folosită pentru trecerea la limită sub semnul integral). ⌋

O altă consecință se obține plecînd de la expresia (3.52′) a formulei lui Poisson și de la inegalitățile

$$(R-\rho)^2 \leqslant R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma \leqslant (R+\rho)^2;$$

(deoarece $-1 \leqslant \cos\gamma \leqslant +1$); presupunînd funcția armonică u nenegativă în D_n, pentru orice $B_R(\mathbf{z}) \subset D_n$ avem

$$\frac{R-\rho}{(R+\rho)^{n-1}}u(\mathbf{y}) \leqslant \frac{(R^2-\rho^2)\,u(\mathbf{y})}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma)^{n/2}} \leqslant \frac{R+\rho}{(R-\rho)^{n-1}}u(\mathbf{y}),$$

de unde, împărțind fiecare termen cu $\omega_n R$ și integrînd pe sfera $B_R(\mathbf{z})$, se obțin inegalitățile:

$$\frac{R-\rho}{\omega_n R(R+\rho)^{n-1}}\int\limits_{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|=R} u(\mathbf{y})\,d\sigma_{\mathbf{y}} \leqslant \int\limits_{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|=R} K(\mathbf{x}-\mathbf{z},\mathbf{y}-\mathbf{z})\,u(\mathbf{y})\,d\sigma_{\mathbf{y}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R+\rho}{\omega_n R(R-\rho)^{n-1}}\int\limits_{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|=R} u(\mathbf{y})\,d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Ținînd seama de notațiile (3.47), de formula lui Poisson și de teorema de medie, găsim următoarele inegalități:

$$\frac{R-\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}{R+\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}\left(\frac{R}{R+\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}\right)^{n-2}u(\mathbf{z}) \leqslant u(\mathbf{x}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R+\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}{R-\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}\left(\frac{R}{R-\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}\right)^{n-2}u(\mathbf{z}), \tag{3.53}$$

care conduc la teorema următoare:

Teorema 3.22 (*inegalitățile lui Harnack*). *Pentru orice funcție u armonică și nenegativă într-un domeniu D_n, sînt valabile inegalitățile* (3.53) *dacă* $R < (\mathbf{z}, \partial D_n)$ *și* $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| < R^*$.

*) $d(\mathbf{x}, \partial D_n)$ este ca de obicei distanța dintre $\mathbf{x}$ și ∂D_n.

Teorema 3.23 (*Liouville*). *Orice funcție armonică în $\mathbb{R}^n$, mărginită fie superior, fie inferior, este o constantă.*

⌜ Fie u mărginită inferior; atunci dacă m este această margine, funcția $v = u - m$ este de asemenea armonică în $\mathbb{R}^n$ și nenegativă; deci se pot aplica inegalitățile (3.53) cu $\mathbf{z}$ arbitrar și R oricît de mare: Trecînd la limită pentru $R \to \infty$, obținem pentru un $\mathbf{x}$ arbitrar $v(\mathbf{z}) \leqslant v(\mathbf{x}) \leqslant v(\mathbf{z})$, deci $v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{z}) = \text{const}$ și $u = v + m$ este de asemenea o constantă. Analog se procedează și în cazul în care $u(\mathbf{x}) \leqslant M$. ⌋

Teorema 3.24 (*de convergență Harnack*). *Orice șir monton de funcții armonice, convergent într-un singur punct din domeniul de armonicitate converge către o funcție armonică în orice subdomeniu al domeniului de armonicitate al funcțiilor șirului.*

⌜ Conform cu teorema 3.20 este suficient să demonstrăm convergența uniformă a șirului în orice subdomeniu $D_n' \subset D_n$. Fie $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ șirul monoton în cauză (pe care, pentru determinare, să-l presupunem nedescrescător, $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_m \leqslant \ldots$), care converge în punctul $\mathbf{x}_0 \in D_n$; atunci funcția $u_{m'} - u_m$ cu m' arbitrar mai mare decît m este armonică și nenegativă în D_n, și deci i se pot aplica inegalitățile (3.53). Vom considera doar a doua inegalitate în ipoteza $\mathbf{z} = \mathbf{x}_0$ și cu $R < d(\mathbf{x}_0, \partial D_n)$; se obține

$$0 \leqslant u_{m'}(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x}) \leqslant \frac{R+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}{R-\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\left(\frac{R}{R-\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\right)[u_{m'}(\mathbf{x}_0)-u_m(\mathbf{x}_0)]$$

și deci dacă $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < R$, coeficientul diferenței $u_{m'}(\mathbf{x}_0) - u_m(\mathbf{x}_0)$ este finit și deoarece $u_{m'}(\mathbf{x}_0) - u_m(\mathbf{x}_0) < \varepsilon$ pentru $m' > m \geqslant N_\varepsilon$, va rezulta

$$|u_{m'}(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})| < \varepsilon',\ m',\ m > N_\varepsilon,$$

ε' fiind arbitrar de mic odată cu ε; prin urmare, deoarece ε' este independent de $\mathbf{x}_0$ dacă $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) < R_1 < R$, rezultă că convergența șirului dat într-un punct antrenează convergența uniformă a aceluiași șir orice sferă închisă cu centrul în $\mathbf{x}_0$ și de rază $R_1 < d(\mathbf{x}_0, \partial D_n)$; alegînd un domeniu D_n' mărginit, inclus în D_n, care cuprinde sfera $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \leqslant R_1$, acesta poate fi acoperit cu un număr finit de sfere închise, fiecare avînd centrul în sfera precedentă; în acest mod convergența uniformă poate fi extinsă la orice domeniu mărginit inclus strict în D_n.

3.3.5. Funcții cu proprietatea de medie

Vom studia consecințele care decurg din teorema de medie Gauss pentru funcțiile armonice; această teoremă afirmă că dacă u este

o funcție armonică în domeniul D_n ($\bar{D}_n$ este presupus compact), atunci pentru orice $\mathbf{x} \in D_n$ și orice $r < d(\mathbf{x}, \partial D_n)$ este valabilă egalitatea

$$u(\mathbf{x}) = M_r^{\mathbf{x}}[u], \tag{3.54}$$

media sferică fiind calculată pe sfera de rază r cu centrul în punctul $\mathbf{x}$. Scopul principal al acestui paragraf este de a arăta că dacă $u \in C^0(\bar{D}_n)$ și verifică relația (3.54), atunci u este neapărat o funcție armonică. Observînd că relația (3.54) are sens pentru funcții continue în D_n, vom da următoarea definiție:

Se numește *funcție cu proprietatea de medie în* D_n orice funcție continuă în $\bar{D}_n$, care verifică relația (3.54), pentru orice $\mathbf{x} \in D_n$ și orice $r < d(\mathbf{x}, \partial D_n)$.

Evident, mulțimea funcțiilor cu proprietatea de medie nu este vidă, deoarece funcțiile armonice (a căror mulțime nu este vidă) sînt funcții cu proprietatea de medie; în plus, această mulțime formează un spațiu vectorial; dacă funcțiile u_1 și u_2 au proprietatea de medie, vom avea

$$u_1(\mathbf{x}) = M_r^{\mathbf{x}}[u_1],\ u_2(\mathbf{x}) = M_r^{\mathbf{x}}[u_2]$$

și ținînd seama de liniaritatea operatorului $M_r^{\mathbf{x}}$, vom găsi egalitatea

$$a_1u_1(\mathbf{x}) + a_2u_2(\mathbf{x}) = a_1M_r^{\mathbf{x}}[u_1] + a_2M_r^{\mathbf{x}}[u_2] = M_r^{\mathbf{x}}[a_1u_1 + a_2u_2],$$

care arată că funcția $a_1u_1 + a_2u_2$, care este evident continuă în $\bar{D}_n$, are proprietatea de medie (constantele a_1 și a_2 se presupun reale).

Teorema 3.25 (*de maxim sau minim*). *Orice funcție neconstantă cu proprietatea de medie în* D_n *își atinge valorile maxime și minime pe frontiera domeniului* D_n.

⌜ Funcția u fiind continuă pe un compact își va atinge efectiv valorile minime și valorile maxime; deci există punctele $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ din D_n astfel încît

$$u(\mathbf{x}_1) = \max_{\mathbf{x}\in\bar{D}_n} u(\mathbf{x}),\ u(\mathbf{x}_2) = \min_{\mathbf{x}\in\bar{D}_n} u(\mathbf{x}),$$

iar teorema afirmă că $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \partial D_n$ dacă $u \neq \text{const}$. Pentru demonstrație, fie $\mathbf{x}_1 \in D_n$ și fie A mulțimea punctelor $\mathbf{x}$ din D_n astfel încît dacă $\mathbf{x} \in A$, avem $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_1)$.

Mulțimea A este închisă. Într-adevăr, dacă $(\mathbf{x}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ este un șir din A și $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 \in D_n$, vom avea

$$\lim_{m\to\infty} u(\mathbf{x}_m) = u(\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m) = u(\mathbf{x}_0) = u(\mathbf{x}_1),$$

deoarece $u(\mathbf{x}_m) = u(\mathbf{x}_1)$ pentru orice m iar u este o funcție continuă. Mulțimea A este o mulțime deschisă. Într-adevăr dacă n-ar fi așa, în orice vecinătate a oricărui punct $\mathbf{x}_0 \in A$ ar exista cel puțin un punct $\mathbf{x}_0'$ astfel încît $u(\mathbf{x}_0') < u(\mathbf{x}_0) = u(\mathbf{x}_1) = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{D}_n} u(\mathbf{x})$. Deoarece u este o funcție continuă, va exista o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0'$ notată cu $V_{\mathbf{x}_0'}$ astfel încît, pentru orice $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{x}_0'}$, să avem $u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}_0)$. Fie acum o sferă S care intersectează vecinătatea $V_{\mathbf{x}_0'}$ și fie $S_1 = S \cap V_{\mathbf{x}_0'}$; din (3.54) va rezulta

$$u(\mathbf{x}_0) = M_r^{\mathbf{x}_0}[u] = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}\|=r} u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{S_1} u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{S\setminus S_1} u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\sigma;$$

or pe S_1 avem

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{S_1} u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\sigma < \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \max_{\mathbf{y}\in S_1} u(\mathbf{y}) \cdot \text{aria. } (S_1),$$

iar pe $S\setminus S_1$ vom avea

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{S\setminus S_1 = S_2} u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \max_{\mathbf{y}\in S_2} u(\mathbf{y}) \cdot \text{aria } (S_2).$$

Prin adunare se va obține inegalitatea

$$u(\mathbf{x}_0) < \frac{\max u(\mathbf{x})}{\omega_n r^{n-1}} (\text{aria } S_1 + \text{aria } S_2) = \max u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_1) = u(\mathbf{x}_0),$$

care fiind contradictorie, arată că A este o mulțime deschisă; așadar, A fiind simultan închisă și deschisă, avem $A = D_n$. Deci dacă punctul în care este atinsă valoarea maximă a funcției u cu proprietatea de medie este în interiorul D_n, atunci u este o constantă; prin urmare, în cazul general valorile maxime ale funcțiilor cu proprietatea de medie se ating pe ∂D_n. Pentru valorile minime, concluzia este aceeași, deoarece și funcția $-u$ are proprietatea de medie, iar în punctele în care u are un minim funcția $-u$ va avea un maxim. ⌟

Această teoremă este fundamentală pentru teoria funcțiilor cu proprietatea de medie (deci și pentru funcțiile armonice) și vom deduce cîteva consecințe care decurg din ea

Teorema 3.26 (*de unicitate a funcțiilor cu proprietatea de medie*). *Dacă funcțiile u și u_2 cu proprietatea de medie în D_n au valori egale pe ∂D_n, atunci ele coincid și în D_n.*

⌜ Funcția $u = u_1 - u_2$ va avea de asemenea proprietatea de medie în D_n, iar $u|_{\partial D_n} = 0$; deci

$$\min_{x \in \overline{D}_n} u(x) \leqslant u(x) \leqslant \max_{x \in \overline{D}_n} u(x),$$

iar

$$\min_{x \in \overline{D}_n} u(x) = u(x_2) \text{ și } \max_{x \in \overline{D}_n} u(x) = u(x_1), \qquad x \in \partial D_n$$

Așadar, $u(x_1) = u(x_2) = 0$ și rezultă $u = 0$ în D_n; deci $u_1 = u_2$ în D_n. ⌟

În consecință, funcțiile armonice în D_n continue în $\overline{D}_n$ își ating valorile maxime și minime pe ∂D_n iar problema Dirichlet interioară în ipoteza $u|_{\partial D_n} \in C^0(\partial D_n)$ admite o singură soluție.

Teorema 3.27. *Orice funcție cu proprietatea de medie este armonică în D_n.*

⌜ Vom arăta că în orice sferă din D_n, orice funcție f cu proprietatea de medie este totodată și o funcție armonică. Fie deci $\|y - z\| \leqslant r$ o sferă complet interioară lui D_n; restricția lui f la această sferă este o funcție continuă, cu ajutorul căreia scriem formula lui Poisson pentru sferă. Vom avea

$$u(x) = \int_{\|y-z\|=r} K(x - z, y - z) f(y)\, d\sigma_y$$

și, conform cu teoria expusă în 3.3.4, funcția u va fi armonică în interiorul sferei $\|x - z\| = r$ care pe sferă ia valorile f; deoarece u are proprietatea de medie, conform cu teorema anterioară $u = f$ în această sferă și teorema este astfel demonstrată, deoarece f devine o funcție armonică în orice punct din D_n. ⌟

În acest mod s-a arătat că relația (3.54) este foarte puternică, funcțiile continue care o verifică trebuind să fie soluții ale ecuației Laplace, deci și indefinit derivatele.

În continuare vom demonstra alte proprietăți ale funcțiilor armonice care rezultă în special din teorema de medie.

Teorema 3.28 (*de dependență continuă de date a soluției problemei Dirichlet*). *Funcția armonică u continuă în $\overline{D}_n$, care pe ∂D_n coincide cu funcția continuă f, depinde continuu de f.*

⌜ Fie f_1 o altă funcție continuă pe ∂D_n astfel încît $\|f - f_1\| < \varepsilon$, deci valorile minime și maxime ale diferenței $f - f_1$ sînt cuprinse între $-\varepsilon$ și $+\varepsilon$; or, dacă u și u_1 sînt soluțiile problemei Dirichlet pentru valorile f, respectiv f_1 pe frontieră, rezultă că și în D_n diferența $u - u_1$ va fi cuprinsă între aceleași valori maxime și minime, deci $\|u - u_1\| < \varepsilon$.

Așadar și soluția problemei Dirichlet $u|_{\partial D_n} = f$ pentru ecuația Poisson $\Delta_n u = F$ depinde continuu de f.

Teorema 3.29 (*de convergență Harnack*). *Fie $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții armonice în D_n, continue în $\overline{D}_n$, uniform convergent pe ∂D_n. Atunci același șir este uniform convergent și în D_n, limita lui fiind o funcție armonică.*

⌜ Demonstrația este imediată deoarece $|f_k - f_{k'}| < \varepsilon$ pentru orice $k, k' \geqslant N_\varepsilon$, ε fiind independent de x, în baza teoremei anterioare, vom avea $|u_k - u_{k'}| < \varepsilon$ oricare ar fi $k, k' \geqslant N_\varepsilon$; armonicitatea rezultată din teorema 3.20. ⌟

Teorema 3.21 se poate demonstra și cu ajutorul teoriei funcțiilor cu proprietatea de medie: astfel, dacă șirul $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ este un șir uniform convergent în $\overline{D}_n$ de funcții armonice, vom avea $\lim_{k \to \infty} u_k = u \in C^0(D_n)$; funcția u va avea proprietatea de medie, deoarece se poate trece la limită sub semnul integral în egalitățile $u_k(x) = M_r^x[u_k]$ valabile pentru orice $k = 1, 2, \ldots$; deci u este armonică în D_n.

Mulțimea funcțiilor armonice în D_n, continue în $\overline{D}_n$, poate fi organizată ca un spațiu Banach în raport cu norma $\|u\| = \max_{x \in D_n} |u(x)|$. Într-adevăr," deoarece convergența în această normă coincide cu convergența uniformă, nu avem decît să folosim observația anterioară pentru a deduce că orice șir fundamental converge către o funcție armonică în D_n și continuă pe $\overline{D}_n$.

După cum s-a stabilit în cap. 2, soluțiile de clasă C^2 ale ecuației Helmholtz

$$\Delta_n u + au = 0, \qquad a \in R, \tag{3.55}$$

verifică teorema de medie

$$M_r^x[u] = P_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{a}\, r)\, u(x), \tag{3.56}$$

în care $P_\nu(z)$ este o funcție Bessel normată: $P_\nu(0) = 1$.

Vom stabili acum cîteva identităţi legate de media sferică; vom nota prin M_r^k media sferică pe sfera de rază r din spaţiul euclidian cu k dimensiuni. Este valabilă formula

$$M_r^{n+1}[f(\mathbf{x})\cdot g(x_{n+1})] = \frac{2\omega_n}{r^{n-1}\omega_{n+1}} \int_0^r \frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{r^2-\rho^2}} M^1_{\sqrt{r^2-\rho^2}}[g]\, M_\rho^n[f]\,\mathrm{d}\rho \tag{3.57}$$

pentru orice funcţii continue f şi g care depind de n variabile, respectiv o variabilă. Într-adevăr, dacă $\boldsymbol{\alpha}$ este un punct al sferei unitate din $\mathbb{R}^{n-1}(\|\boldsymbol{\alpha}\| = 1)$, scriind $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) = (\boldsymbol{\alpha}', \alpha_{n+1})$, $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, vom acea punînd $\xi = r\boldsymbol{\alpha} = (\xi', \xi_{n+1})$:

$$M_r^{n+1}[f(\mathbf{x})\cdot g(x)_{n+1}] = \frac{1}{r^n\omega_{n+1}} \int_{\|\xi\|=r} f(\mathbf{x}+\xi')\, g(x_{n-1}+\xi_{n+1})\,\mathrm{d}\sigma_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{r^{n-1}\omega_{n+1}} \int_{\|\xi'\|<r} f(\mathbf{x}+\xi')\,[g(x_{n+1}+\sqrt{r^2-\|\xi'\|^2}) +$$

$$+ g(x_{n+1}-\sqrt{r^2-\|\xi'\|^2})]\,\frac{\mathrm{d}\xi'}{\sqrt{r-\|\xi\|^2}},$$

deoarece $\mathrm{d}\sigma_{n+1} = \dfrac{r\mathrm{d}\xi'}{\sqrt{r^2-\|\xi'\|^2}}$ iar $\xi_{n+1}^2 = r^2 - \|\xi'\|^2$ (s-a utilizat faptul că proiecţia sferei $\|\xi\| = r$ din $\mathbb{R}^{n+1}$ în hiperplanul $x_{n+1} = 0$ este interiorul sferei $\|\xi'\| = r$, acest domeniu obţinîndu-se de două ori: o dată prin proiectarea emisferei superioare, pentru care $\xi_{n+1} = +\sqrt{r^2-\|\xi'\|^2}$ şi a doua oară prin proiectarea emisferei inferioare, pentru care $\xi_{n+1} = -\sqrt{r^2-\|\xi'\|^2}$). Este evident că ultima egalitate va conduce direct la formula (3.57), prin introducerea unui sistem de coordonate sferice în $\mathbb{R}^n$, punînd $\|\xi'\| = \rho$ şi utilizînd definiţia mediei sferice din spaţiul $\mathbb{R}^n$.

Identitatea (3.57) este importantă prin aceea că leagă media sferică a produsului $f(\mathbf{x})\cdot g(x_{n+1})$ de mediile sferice separate ale funcţiilor f şi g.

În particular, dacă $g(x_{n+1}) = \mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}}$, $M^1_{\sqrt{r^2-\rho^2}}\left[\mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}}\right] = \mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}} \times$ $\times\ \mathrm{ch}\,[\sqrt{a(r^2-\rho^2)}]$ deci putem scrie

$$M_r^{n+1}\left[f(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}}\right] = \frac{2\omega_n \mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}}}{r^{n-1}\omega_{n+1}} \int_0^r \frac{\rho^{n-1}\mathrm{ch}\,[\sqrt{a(r^2-\rho^2)}]}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\, M_\rho^n[f]\,\mathrm{d}\rho. \tag{3.57'}$$

Teorema 3.30. *Orice funcţie continuă în D_n care verifică în orice punct $\mathbf{x}_0$ din D_n relaţia* (3.56) *pentru orice $r < d(\mathbf{x}_0, \partial D_n)$ este o funcţie indefinit derivabilă care verifică ecuaţia Helmholz* (3.55).

⌜ Să presupunem că în (3.57′) vom înlocui f prin u, u fiind soluţie a ecuaţiei Helmholtz; în această ipoteză, funcţia $u(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}}$ este o funcţie armonică în $D_n \times \mathbb{R}$ (D_n fiind domeniul de regularitate al funcţiei u) şi deci, în baza teoremei de medie Gauss, vom avea

$$M_r^{n+1}\left[u(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}}\right] = u(\mathbf{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}};$$

în plus, utilizînd formula (3.56), din (3.57′) va rezulta identitatea

$$\int_0^r \frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\,\mathrm{ch}[\sqrt{a(r^2-\rho^2)}]\,P_{\frac{n}{2}-1}(\rho\sqrt{a})\mathrm{d}\rho = \frac{\omega_{n+1}}{2\omega_n} r^{n-1}. \tag{3.57''}$$

Înmulţind ambii membri ai lui (3.56), cu $\dfrac{r^{n-1}}{\sqrt{t^2-r^2}}\,\mathrm{ch}\,[\sqrt{a(t^2-r^2)}]$ $(t>r)$ şi integrînd între 0 şi t, prin utilizarea lui (3.57″) se va obţine egalitatea

$$\int_0^t \frac{r^{n-1}}{\sqrt{t^2-r^2}}\,\mathrm{ch}[\sqrt{a(t^2-r^2)}]\; M_r[u(\mathbf{x})]\mathrm{d}r = \frac{\omega_{n+1}}{2\omega_n} t^{n-1}u(\mathbf{x})$$

care, comparată cu identitatea (3.57′), va conduce la o nouă egalitate

$$M_t^{n+1}\left[u(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}}\right] = \mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}}\,u(\mathbf{x}),$$

valabilă pentru orice $t>0$ suficient de mic; în baza teoremei 3.26 va rezulta că funcţia $u(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}}$ este indefinit derivabilă, fiind armonică în $D_n \times \mathbb{R}$. Calculînd $\Delta_{n+1}\left[u(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}}\right]$, găsim că ecuaţia verificată de u este ecuaţia lui Helmholtz (3. 55) iar $u \in C^\infty$ (D_n), deoarece $u(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\sqrt{a}x_{n+1}} \in C^\infty$ $(D_n \times \mathbb{R})$. ⌟

Se poate arăta că pentru soluţiile ecuaţiei lui Helmholtz nu poate fi întotdeauna valabilă o teoremă de maxim şi minim cum este cazul ecuaţiei lui Laplace; este valabilă, teorema 3.31.

Teorema 3.31. *Dacă $a<0$, orice soluție a ecuației (3.55) continuă în $\overline{D}_n$ își atinge valorile extreme numai pe frontiera domeniului D_n (presupus mărginit).*

⌜ Dacă $a<0$, notînd $b=-a$, avem $b>0$ și vom putea scrie

$$P_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{a}\,r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{\sqrt{a}r}{2}\right)^{-2k}}{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}+k\right)\Gamma(k+1)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^k r^{2k}}{2^{2k}k!\,\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}+k\right)}>1,$$

deoarece seria are toți termenii pozitivi, primul termen fiind egal cu unitatea.

Pentru a demonstra teorema, nu avem decît să repetăm punct cu punct demonstrația teoremei 3.27 și în demonstrația faptului că A este mulțime deschisă, va apărea inegalitatea

$$P_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{a}r)u(\mathbf{x}_0)<u(\mathbf{x}_0)$$

care este imposibilă, deoarece $P_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{a}\,r)>1$. ⌟

3.4. Teoria potențialului

3.4.1. Potențialul de volum

În acest punct ne vom ocupa, pe scurt, de unele proprietăți ale integralelor cu parametri definite prin

$$V(\mathbf{x})=\int_{D_n}\frac{\mu(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}}\,d\mathbf{y},\qquad v(\mathbf{x})=\int_{S_1}\frac{\mu_1(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}}\,d\sigma_y,\qquad (3.58)$$

$$w(\mathbf{x})=\int_{S_2}\mu_2(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial\nu_y}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}}\right)d\sigma_y,$$

numite anterior *potențial de volum*, *simplu strat* și *dublu strat* respectiv. În ceea ce privește potențialul de volum V, o parte din proprietățile care ne interesează au fost expuse în 3.3.1, pe care le vom reformula acum, cu unele completări (D_n, S_1 și S_2 se presupun varietăți mărginite)

Teorema 3.32. *Dacă distribuția μ este o funcție mărginită și integrabilă în D_n, atunci potențialul de volum este o funcție de clasă C^1 în $\mathbb{R}^n$, nulă la infinit.*

Dacă μ este o funcție derivabilă în D_n iar derivatele parțiale sînt mărginite și integrabile în D_n, atunci V este o funcție de clasă C^2 și verifică ecuația Poisson

$$\Delta_n V(\mathbf{x})=(2-n)\,\omega_n\mu(\mathbf{x})$$

în fiecare punct $\mathbf{x}\in D_n$.

⌜ Demonstrația va fi completă dacă arătăm că $V(\mathbf{x})\to 0$ cînd $\|\mathbf{x}\|\to\infty$. Pentru aceasta se alege o origine arbitrară în $\mathbb{R}^n$, pe care să o notăm prin $\mathbf{z}$; vom avea, din triunghiul cu vîrfurile în punctele $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ și $\mathbf{z}=(0,0,\ldots,0)$;

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2=\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2-2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\gamma,$$

γ fiind unghiul dintre laturile $\mathbf{zx}$ și $\mathbf{zy}$. Rezultă $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\geqslant\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|$ și deci

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}\leqslant(\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|)^{2-n}=\|\mathbf{x}\|^{2-n}\left(1-\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}\right)^{2-n}\leqslant\frac{A}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}}$$

cu $A=\inf\limits_{\mathbf{y}\in\overline{D}_n}\left(1-\dfrac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}\right)^{2-n}$. Deoarece $\|\mathbf{x}\|\to\infty$, $\|\mathbf{y}\|\leqslant M$, avem $\dfrac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}<1$, ceea ce înseamnă $A>0$; se va obține deci evaluarea

$$|V(\mathbf{x})|\leqslant\frac{M'A}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}},\quad M'=\int_{D_n}|\mu(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}.$$ ⌟

Pe scurt, se obișnuiește să se scrie ultima inegalitate sub forma $V(\mathbf{x})=O(\|\mathbf{x}\|^{2-n})$, $n>2$.

Trebuie menționat că ipoteza făcută asupra lui μ pentru ca V să fie de clasă C^2 și anume ca μ să fie derivabil și toate derivatele parțiale să fie mărginite și integrabile în D_n nu este obligatorie, după cum

putem constata imediat, utilizînd identitatea (3.42), care pentru $\mathbf{x} \in D_n$ se scrie

$$-u(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu_\mathbf{y}} \, \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} - \int_{\partial D_n} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \nu_\mathbf{y}} \, \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} - \int_{D_n} \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \, \Delta_n u(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y};$$

ţinînd seama că $\mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}$,

$$\Delta_n^{\mathbf{x}} \left(\int_{\partial D_n} \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu_\mathbf{y}} \, \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} \right) = 0, \quad \Delta_n^{\mathbf{x}} \left(\int_{\partial D_n} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathscr{E}_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \nu_\mathbf{y}} \, \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} \right) = 0,$$

pentru $\mathbf{x} \in D_n$, prin aplicarea operatorului Δ_n, notînd $\Delta_n u = \mu$, găsim egalitatea

$$\mu(\mathbf{x}) = -\frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \Lambda_n \left(\int_{D_n} \frac{\mu(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}} \, \mathrm{d}\mathbf{y} \right)$$

care înseamnă că potenţialul de volum verifică ecuaţia Poisson $\Delta_n V(\mathbf{x}) = (2-n)\omega_n \mu(\mathbf{x})$ dacă μ este o funcţie continuă (nu neapărat derivabilă), provenind dintr-o funcţie de clasă C^2 prin aplicarea operatorului lui Laplace.

De asemenea se poate arăta că dacă μ este o funcţie hölderiană în D_n (adică $|\mu(\mathbf{x}_1) - \mu(\mathbf{x}_2)| \leqslant m \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $m > 0$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ fiind puncte oarecare din D_n), V este o funcţie de clasă C^2.

Faptul că potenţialul de volum verifică în D_n ecuaţia Poisson iar în exteriorul lui D_n verifică ecuaţia Laplace are drept consecinţă discontinuitatea derivatelor de ordinul al doilea ale lui V (în caz contrar, ar trebui să fie verificată aceeaşi ecuaţie atît în D_n cît şi în afara lui D_n).

Prin inducţie, se poate arăta uşor că dacă $\mu \in C^k(D_n)$, atunci $V \in C^{k+1}(D_n)$ şi deci dacă $\mu \in C^\infty(D_n)$, atunci $V \in C^\infty(D_n)$.

3.4.2. Potenţialul de simplu şi dublu strat

Teorema 3.33. *Potenţialul de simplu strat (potenţialul de dublu strat), în cazul în care μ_1 (μ_2) este definită şi absolut integrabilă pe o hipersuprafaţă mărginită, tinde la zero cînd $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ aşa cum tinde $\|\mathbf{x}\|^{2-n}$ (respectiv $\|\mathbf{x}\|^{1-n}$).*

⌜ Demonstraţia este imediată dacă folosim evaluarea $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant B^{-1} r$, unde $r = \|\mathbf{x}\|$, iar

$$B = \inf_{\mathbf{y} \in S} \left(1 - \frac{\rho}{r} \right), \qquad \rho = \|\mathbf{y}\|,$$

originea fiind plasată într-un punct arbitrar din $\mathbb{R}^n$; vom avea $B \neq 0$ deoarece se presupune $\mathbf{y} \in S$ şi $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ şi deci se pot face majorările:

$$|v(\mathbf{x})| \leqslant \int_{S_1} \frac{|\mu_1(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}} \, \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} \leqslant \frac{B^{n-2}}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}} \int_{S_1} |\mu_1(\mathbf{y})| \, \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} = O(\|\mathbf{x}\|^{2-n});$$

$$|w(\mathbf{x})| \leqslant \int_{S_2} |\mu_2(\mathbf{y})| \left| \frac{\partial}{\partial \nu_\mathbf{y}} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) \right| \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} \leqslant$$

$$\leqslant (n-2) \|\mathbf{x}\|^{1-n} B^{n-1} \int_{S_2} |\mu_2(\mathbf{y})| \, \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y} = O(\|\mathbf{x}\|^{1-n}),$$

deoarece

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\mathbf{y}} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n} = (2-n) \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{1-n} \frac{\partial \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{\partial \nu_\mathbf{y}}$$

iar

$$\frac{\partial(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{\partial \nu_\mathbf{y}} = (\nabla_n^\mathbf{y} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|, \quad \boldsymbol{\nu}_\mathbf{y}) = \cos(\boldsymbol{\nu}_\mathbf{y}, \mathbf{xy}), \text{ şi deci } \left| \frac{\partial(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{\partial \nu_\mathbf{y}} \right| \leqslant 1.$$

⌟

Pentru a studia comportarea potenţialului de simplu şi dublu strat la traversarea suprafeţei S, vom presupune că S este o suprafaţă închisă din $\mathbb{R}^n$, fiind frontiera domeniului D_n. Această ipoteză nu constituie o restricţie, deoarece dacă S este o suprafaţă oarecare din $\mathbb{R}^n$, iar traversarea ei se face prin punctul $\mathbf{x}_0 \in S$, este suficient să considerăm o vecinătate S' a punctului $\mathbf{x}_0$ situată pe S şi să presupunem că S' împreună cu altă suprafaţă S'' formează frontiera unui domeniu D_n, $\partial D_n = S' \cup S''$; este suficient să găsim comportarea la traversare prin punctul $\mathbf{x}_0$ a potenţialului de simplu sau dublu strat,

deoarece pe suprafața rămasă $S \setminus S'$ potențialul în cauză este o funcție armonică fiindcă $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\| \neq 0$ cînd $\mathbf{y} \in S \setminus S''$.

Vom conveni să notăm prin $-$ (minus) porțiunea din spațiul $\mathbb{R}^n$ aflată în domeniul D_n și prin $+$ (plus) porțiunea din spațiul $\mathbb{R}^n$ aflată în exteriorul domeniului D_n; astfel dacă $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \in \partial D_n$ din interiorul lui D_n, vom scrie acest lucru

$$f(\mathbf{x}_0^-) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \in D_n \\ \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0}} f(\mathbf{x}^-),$$

iar simbolul $f(\mathbf{x}_0^+)$ înseamnă că $\mathbf{x}$ tinde către $\mathbf{x}_0 \in D_n$ pe un drum complet exterior lui D_n, f fiind definită în vecinătatea lui ∂D_n.

Teorema 3.34. *Dacă distribuția μ_2 este o funcție continuă pe ∂D_n, atunci potențialul de dublu strat*

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \mu_2(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_\mathbf{y}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n})\, \mathrm{d}\sigma_\mathbf{y}$$

este o funcție definită pentru orice $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, discontinuă în $\mathbb{R}^n$, discontinuitățile fiind exprimate prin relațiile:

$$w(\mathbf{x}^-) = w(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} C_n \mu_2(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \partial D_n; \tag{3.59}$$

$$w(\mathbf{x}^+) = w(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} C_n \mu_2(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \partial D_n; \tag{3.59'}$$

unde $C_n = (n-2)\omega_n$. Notînd cu $[w(\mathbf{x}_0)]_{\partial D_n}$ saltul funcției w la traversarea suprafeței ∂D_n prin punctul $\mathbf{x}_0$, adică

$$[w(\mathbf{x}_0)]_{\partial D_n} = w(\mathbf{x}_0^+) - w(\mathbf{x}_0^-),$$

are loc următoarea relația de salt:

$$[w(\mathbf{x})]_{\partial D_n} = (n-2)\omega_n \mu_2(\mathbf{x}). \tag{3.60}$$

⌜ Vom utiliza formula (3.40) în care vom presupune u o funcție de clasă C^1 în D_n, de clasă C^0 în D_n și astfel încît $u(\mathbf{x}) = \mu_2(\mathbf{x})$ pentru $\mathbf{x} \in \partial D_n$; vom obține egalitatea

$$w(\mathbf{x}) = \int_{D_n} (\nabla_n^\mathbf{y}(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n}),\ \nabla_n^\mathbf{y} u(\mathbf{x}))\ \mathrm{d}\mathbf{y} + pC_n u(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

care arată că orice potențial de dublu strat se poate scrie ca o sumă de doi termeni care au sens pentru orice $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ deoarece primul se scrie sub forma

$$\int_{D_n} (\nabla_n^\mathbf{y} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n},\ \nabla_n^\mathbf{y} u(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{y} = -\int_{D_n} (\nabla_n^\mathbf{x} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n},\ \nabla_n^\mathbf{y} u(\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{y} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \int \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n})\, \mathrm{d}\mathbf{y},$$

care arată că acest termen este de fapt o sumă de derivate ale unor potențiali de volum cu distribuția $\dfrac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_j} \in C^0(D_n)$, care sînt evident mărginite și integrabile în D_n și conform cu cele stabilite anterior toți acești termeni sînt funcții continue în $\mathbb{R}^n$. Al doilea termen, adică $pC_n \cdot u$, este de asemenea definit pentru orice $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Vom scrie relația care-l exprimă pe $w(\mathbf{x})$ sub forma

$$w(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + pC_n \cdot u(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

F fiind o funcție continuă în $\mathbb{R}^n$; făcînd $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \in \partial D_n$, se obține egalitatea

$$w(\mathbf{x}_0) = F(\mathbf{x}_0) - \frac{1}{2} C_n \cdot \mu_2(\mathbf{x}_0),$$

care arată că potențialul de dublu strat are sens și cînd $\mathbf{x} \in \partial D_n$, fiind o funcție continuă pe ∂D_n. Pe de altă parte vom obține

$$w(\mathbf{x}^-) = F(\mathbf{x}^-) - C_n \cdot u(\mathbf{x}^-)$$

și prin trecere la limită pentru $\mathbf{x}^- \to \mathbf{x}_0$, găsim

$$w(\mathbf{x}_0^-) = F(\mathbf{x}_0) - C_n \cdot \mu_2(\mathbf{x}_0), \qquad \mathbf{x}_0 \in \partial D_n,$$

dacă folosim continuitatea funcțiilor $F(\mathbf{x})$ și $u(\mathbf{x})$. Utilizînd și expresia lui $w(\mathbf{x}_0)$, se obține egalitatea

$$w(\mathbf{x}_0) = w(\mathbf{x}_0) - \frac{1}{2} C_n \cdot \mu_2(\mathbf{x}_0),$$

care coincide cu relația (3.59). Calculînd pe $w(\mathbf{x}^+)$, vom găsi

$$w(\mathbf{x}^+) = F(\mathbf{x}^+), \qquad \mathbf{x}^+ \in \mathbb{R}^n \setminus D_n,$$

deoarece $p = 0$ pentru $\mathbf{x} \notin \bar{D}_n$ și trecînd la limită $\mathbf{x}^+ \to \mathbf{x}_0$, se va obține egalitatea $w(\mathbf{x}_0^+) = F(\mathbf{x}_0)$, care combinată iarăși cu expresia lui $\mathbf{x}_0(w)$ conduce la egalitatea

$$w(\mathbf{x}_0^+) = w(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} C_n \mu_2(\mathbf{x}_0),$$

care coincide cu egalitatea (3.59′). Făcînd diferența dintre $w(\mathbf{x}_0^+)$ și $w(\mathbf{x}_0^-)$, se va obține relația (3.60) de salt a potențialului de dublu strat, dacă se ține seama că $C_n = (n-2)\,\omega_n$. ⌟

Demonstrația acestei teoreme se putea face și pe altă cale, plecînd de la formula (3.42) în care se presupune $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial D_n} = 0$ dacă $\mu_2 \in C^1(\partial D_n)$, deoarece din această formulă se poate extrage de asemenea expresia potențialului de dublu strat, obținîndu-se egalitatea

$$w(\mathbf{x}) = pC_n u(\mathbf{x}) - \int_{D_n} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n} \Delta_n u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y},$$

care va coincide cu expresia anterioară a potențialului de dublu strat deoarece se poate nota $F(\mathbf{x}) = -\int_{D_n} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n} \Delta_n u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$, iar F este un potențial de volum cu distribuția $\Delta_n u \in C^0(D_n)$ deoarece $u \in C^2(D_n)$.

De asemenea, acest rezultat este previzibil, în baza convergenței integralelor improprii dintr-un spațiu dat ; în cazul potențialului de dublu strat puterea la care se ridică funcția $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ este $n-1$, deci egală cu dimensiunea varietății de integrare S (avem, prin ipoteză, dim $S = n-1$), ceea ce face ca integrala care îl definește pe w să nu fie o funcție continuă în $\mathbb{R}^n$. În cazul potențialului de simplu strat, însă, vom putea spune de la bun început că acesta va fi o funcție continuă în $\mathbb{R}^n$, rezultat care va fi demonstrat mai jos.

Înainte de a trece la demonstrația acestei teoreme să facem unele observații privind posibilitatea de a utiliza funcții care pe o hipersuprafață S să fie nule sau să aibă derivata după direcția normalei la S nulă. Pentru aceasta, fie $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ecuația carteziană a lui S și să efectuăm schimbarea la variabile nedegenerată.

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots \bar{x}_{n-1} = \bar{x}_{n-1}(x_1, \ldots, x_n), \bar{x}_n = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$

în care $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}$ sînt funcții convenabil alese. O funcție $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ definită în vecinătatea lui S, de o clasă dată, prin această schimbare de variabilă se va transforma într-o funcție de variabile $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}$. Dacă $u \in C^2$, vom putea scrie utilizînd dezvoltarea Taylor

$$u(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = u_0(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) + \bar{x}_n u_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) + U(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)\bar{x}_n^2,$$

de unde rezultă imediat că dacă efectuăm schimbarea de funcție $u - u_0 \to V$, avem,

$$V|_S = V|_{x_n=0} = (x_n u_1 - U\bar{x}_n^2)|_{x_n=0} = 0$$

și deci funcția V este nulă pe S.

Deoarece putem presupune că transformarea în cauză a fost astfel aleasă încît să avem $\left.\frac{\partial}{\partial \nu}\right|_S = \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}_n}\right|_{x_n=0}$, va rezulta că prin efectuarea schimbării de funcție $u - \bar{x}_n \cdot u_1 \to v_1$ vom obține

$$\left.\frac{\partial V_1}{\partial \bar{x}_n}\right|_{\bar{x}_n=0} = \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}_n}(u - \bar{x}_n u_1)\right|_{\bar{x}_n=0} = \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}_n}(u_0 + \bar{x}_n^2 U)\right|_{\bar{x}_n=0} = 0,$$

deoarece u_0 nu depinde de $\bar{x}_n$.

Trecînd la studiul proprietăților la traversare ale potențialului de simplu strat, se poate demonstra teorema următoare :

Teorema 3.35. *Dacă distribuția* $\mu_1 \in C^0(\partial D_n)$, *atunci potențialul de simplu strat*

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \frac{\mu_1(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}} \, d\sigma_y$$

este o funcție definită pentru orice $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *continuă în întreg spațiul* $\mathbb{R}^n$.

⌜ Demonstrația se poate face în două moduri

a) Utilizînd formula (3.42), dacă notăm $\mu_1 = \frac{\partial u}{\partial \nu} \in C^0(\partial D_n)$, se poate extrage funcția v, care va fi exprimată prin suma

$$v(\mathbf{x}) = -pC_n u(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

cu notațiile

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} u(\mathbf{y}) \frac{\partial(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n})}{\partial \nu_y} \, d\sigma_{\mathbf{y}},$$

$$V(\mathbf{x}) = \int_{D_n} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n} \Delta_n u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \; C_n = (n-2)\omega_n$$

ceea ce face ca orice potențial de simplu strat să se poată scrie sub forma unei sume cu trei termeni, dintre care unul este un potențial de dublu strat, iar altul este un potențial de volum ; deoarece proprietățile acestor potențiale sînt cunoscute, se pot deduce cu ușurință proprietățile funcției v enunțate în teoremă. Astfel, dacă $\mathbf{x} \in \partial D_n$, vom obține

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} C_n u(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})$$

și deoarece $u \in C^1(\partial D_n)$, $w \in C^0(\partial D_n)$, iar $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$, va rezulta $v \in C^0(\partial D_n)$. Apoi

$$v(\mathbf{x}_0^-) = C_n u(\mathbf{x}_0^-) + w(\mathbf{x}_0^-) + V(\mathbf{x}_0^-) = \frac{1}{2} C_n u(\mathbf{x}_0) + w(\mathbf{x}_0) + V(\mathbf{x}_0),$$

dacă ținem seama de expresia (3.59) a lui $w(\mathbf{x}_0^-)$ și de faptul că distribuția lui w este chiar u ; în sfîrșit,

$$v(\mathbf{x}_0^+) = w(\mathbf{x}_0^+) + V(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} C_n u(\mathbf{x}_0) + V(\mathbf{x}_0) + w(\mathbf{x}_0)$$

deoarece $p = 0$ și este valabilă egalitatea (3.59′). Comparînd egalitățile obținute, rezultă relația de continuitate $v(\mathbf{x}_0^-) = v(\mathbf{x}_0) = v(\mathbf{x}_0^+)$, $\mathbf{x}_0 \in D_n$ pentru potențialul de simplu strat.

b) Utilizînd din nou formula (3.52), să presupunem că $u(\mathbf{x}) = 0$ pentru $\mathbf{x} \in \partial D_n$; deci $u \in C^2(D_n)$, $u \in C^1(\bar{D}_n)$, iar $u(\mathbf{x}) = 0$ pentru $\mathbf{x} \in \partial D_n$; va rezulta, cu notația $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial D_n} = \mu_1$, o altă relație pentru potențialul de simplu strat :

$$v(\mathbf{x}) = -pC_n u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.61}$$

din care rezultă consecințele următoare :

— pe ∂D_n potențialul este o funcție continuă, deoarece $v(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$ dacă $x \in \partial D_n$;

$-v(\mathbf{x}_0^-) = -pC_n u(\mathbf{x}_0) + V(\mathbf{x}_0) = V(\mathbf{x}_0)$, căci $\mathbf{x}_0 \in \partial D_n$ și prin ipoteză $u(\mathbf{x}_0) = 0$;

— $v(\mathbf{x}_0^+) = V(\mathbf{x}_0)$, deoarece $p = 0$.

Deci $v(\mathbf{x}_0^+) = v(\mathbf{x}_0) = v(\mathbf{x}_0^-)$. ⌟

Pentru aplicațiile ulterioare ale potențialelor de simplu și dublu strat avem nevoie de proprietățile, la traversare ale derivatelor normale ale acestor potențiale. Vom demonstra

Teorema 3.36. *Derivatele normale la* ∂D_n *ale potențialului de simplu strat există și formează o funcție discontinuă în* $\mathbb{R}^n$, *discontinuitățile fiind exprimate prin relațiile* :

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}_0^-)}{\partial \nu} = \frac{\partial v(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} + \frac{1}{2} C_n \mu_1(\mathbf{x}_0), \qquad \mathbf{x}_0 \in \partial D_n, \tag{3.62}$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}_0^+)}{\partial \nu} = \frac{\partial v(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} - \frac{1}{2} C_n \mu_1(\mathbf{x}_0), \qquad \mathbf{x}_0 \in \partial D_n ; \tag{3.62′}$$

notînd cu $\left[\frac{\partial v(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu}\right]_{\partial D_n}$ *saltul funcției v la traversarea suprafeței* ∂D_n *prin punctul* $\mathbf{x}_0$, *este valabilă următoarea relație de salt* :

$$\left[\frac{\partial v(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu}\right]_{\partial D_n} = (2 - n)\,\omega_n \mu_1(\mathbf{x}_0). \tag{3.63}$$

⌜ Deoarece potențialul de simplu strat este o funcție armonică în $\mathbb{R}^n \setminus \partial D_n$, rezultă că în exteriorul lui ∂D_n i se pot efectua derivatele de ordinul întîi în raport cu orice direcție dorim, în particular și după o direcție care să constituie o direcție normală la ∂D_n ; rămîne de văzut ce se întîmplă în vecinătatea suprafeței ∂D_n ; pentru aceasta vom folosi (3.61) :

$$v(\mathbf{x}) = -\,pC_n u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

care poate fi derivată în raport cu orice direcție deoarece $u \in C^1(\bar{D}_n)$, iar $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$; se va obține egalitatea

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \nu} = -\,pC_n \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} + F(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

unde $F = \frac{\partial V}{\partial \nu} \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Dacă $\mathbf{x}_0 \in \partial D_n$, această relație are evident sens, deoarece înlocuirea directă conduce la egalitatea

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} = \frac{1}{2} C_n \cdot \frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} + F(\mathbf{x}_0).$$

Pe de altă parte, se obțin egalitățile

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}_0^-)}{\partial \nu} = -\,C_n \frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} + F(\mathbf{x}_0), \qquad \frac{\partial v(\mathbf{x}_0^+)}{\partial \nu} = F(\mathbf{x}_0),$$

care combinate cu $\frac{\partial v(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu}$ dedus mai sus conduc la relațiile (3.62) și relația de salt se obține prin diferență. ⌟

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstra o teoremă privind comportarea la traversare a derivatelor normale ale potențialului de dublu strat.

Teorema 3.37. *Derivatele normale ale potențialului de dublu strat au saltul nul la traversarea suprafeței* ∂D_n *dacă* $\mu_2 \in C^1(\partial D_n)$.

⌜ Evident, derivatele după direcțiile normale la ∂D_n pot fi calculate în orice punct exterior lui ∂D_n ; folosind iarăși formula (3.42), se poate extrage potențialul de dublu strat

$$w(\mathbf{x}) = -\,pC_n u(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

unde

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n}\, \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}$$

$$V(\mathbf{x}) = -\int_{D_n} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n}\, \Delta_n u(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y},$$

Această relație arată că este valabilă egalitatea

$$\frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \nu} = -\,pC_n \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu} + \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \nu} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \nu}$$

pentru orice punct exterior sau interior lui ∂D_n. Deoarece sînt valabile egalitățile

$$\frac{\partial w(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} = \frac{1}{2} C_n \frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} + \frac{\partial v(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} + \frac{\partial V(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu},$$

$$\frac{\partial w(\mathbf{x}_0^-)}{\partial \nu} = C_n \frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} + \frac{\partial V(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} + \frac{\partial v(\mathbf{x}_0^-)}{\partial \nu} = \frac{1}{2} C_n \frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} + \frac{\partial v(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} +$$

$$+ \frac{\partial V(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} + \frac{\partial w(\mathbf{x}_0^+)}{\partial \nu} = \frac{\partial v(\mathbf{x}_0^+)}{\partial \nu} + \frac{\partial V(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} =$$

$$= \frac{1}{2} C_n \frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} + \frac{\partial v(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu} + \frac{\partial V(\mathbf{x}_0)}{\partial \nu},$$

dacă ținem seama și de relațiile demonstrate în teorema anteriară, rezultă că derivatele normale ale potențialului de dublu strat se comportă ca o funcție continuă. ⌟

Se poate face observația că această teoremă se poate demonstra și direct folosind formula $w(\mathbf{x}) = -pC_n u(\mathbf{x}) - \int_{D_n} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n} \Delta_n u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ dedusă anterior. În plus, se pot demonstra relații de salt și de continuitate ale derivatelor după o direcție oarecare l ale potențialelor de simplu și dublu strat, dar nu vom insista asupra acestora.

Rezultatele demonstrate sînt valabile pentru acele perechi $(D_n, \partial D_n)$ pentru care se poate aplica formula flux-divergență, adică suprafața S trebuie să admită plan tangent care variază continuu pe S; dacă se exceptează varietățile de discontinuitate, rezultatele rămîn valabile și pentru suprafețe S, care admit plan tangent continuu pe porțiuni.

3.4.3. Rezolvarea problemelor la limită cu ajutorul teoriei potențialului

Teoria potențialului, mai precis, proprietățile potențialelor de simplu strat și de dublu strat, împreună cu teoria lui Fredholm pentru ecuațiile integrale liniare de speța a doua și cu nucleul avînd singularitate slabă (adică dacă $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este nucleul ecuației în cauză, este valabilă majorarea $|K(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant \frac{M}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{\alpha}}, \alpha < n$) permit demonstrarea existenței soluțiilor pentru problemele Dirichlet și Neumann (interioare și exterioare).

Vom presupune că D_n este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^n$ și vom nota prin D_n' domeniul aflat la exteriorul lui D_n: $D_n' = \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_n$.

O funcție u, definită în domeniul D_n', vom spune că este regulată la infinit dacă sînt valabile inegalitățile

$$|u(\mathbf{x})| \leqslant M\|\mathbf{x}\|^{2-n}, \quad \left|\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| \leqslant M\|\mathbf{x}\|^{1-n}, \quad j=1, 2, \ldots, n, \; n>2, \qquad (3.64)$$

pentru $\|\mathbf{x}\|$ suficient de mare.

Este evident că o funcție regulată la infinit tinde uniform la zero cînd $\|\mathbf{x}\| \to \infty$.

Prin *problemă Dirichlet exterioară pentru ecuația Laplace* se va înțelege găsirea unei funcții u, armonică în domeniul D_n' care tinde uniform la zero cînd $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, continuă în $\bar{D}_n' = D_n' \cup \partial D_n$ și care ia valori continue date pe ∂D_n: $u|_{\partial D_n} = f_1$.

Trebuie observat că spre deosebire de definiția pentru problema Dirichlet interioară, în această definiție apare o condiție suplimentară, privind comportarea la infinit a soluției căutate; această condiție este obligatorie, pentru că dacă aceasta nu se impune apriori, se poate întîmpla ca soluția să nu mai fie unică.

Astfel, fie D_n' exteriorul sferei $\|\mathbf{x}\| = R$ și fie u soluția ecuației $\Delta_n u = 0$ în D_n' care ia pe $\|\mathbf{x}\| = R$ valori constante A; este evident că pentru u se pot obține două soluții (cel puțin)

$$u_1(\mathbf{x}) = A \quad \text{și} \quad u_2(\mathbf{x}) = \frac{AR^{n-2}}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}},$$

deoarece $\|\mathbf{x}\|^{2-n}$ este o funcție armonică în D_n'. Dacă se impune și condiția de comportare la infinit, atunci este evident că numai funcția u_2 poate fi considerată ca soluție a problemei Dirichlet exterioare date.

Teorema 3.38. *Problema Dirichlet exterioară admite cel mult o singură soluție.*

⌜ Dacă presupunem că ne aflăm în condițiile definiției anterioare dacă și u_1 și u_2 sînt soluții ale ecuației $\Delta_n u = 0$ în D_n' astfel încît $u_1|_{\partial D_n} = u_2|_{\partial D_n}$, atunci funcția $u_1 - u_2 = u$ va verifica de asemenea ecuația lui Laplace, va fi nulă pe ∂D_n și va tinde uniform la zero, cînd $\|\mathbf{x}\| \to \infty$. Fie sfera $\|\mathbf{x}\| = R$ (avînd centrul aparținînd domeniului D_n) de rază suficient de mare și fie Ω_n domeniul cuprins între sfera $\|\mathbf{x}\| = R$ și ∂D_n; în Ω_n care este un domeniu mărginit, funcția u este armonică și deci își atinge valorile maxime fie pe ∂D_n, fie pe sfera $\|\mathbf{x}\| = R$; or pe ∂D_n, $u = 0$, iar pe $\|\mathbf{x}\| = R$ avem $|u| < \varepsilon$, dacă R este suficient de mare, ε fiind independent de $\mathbf{x}$. În baza teoremei de maxim și minim în Ω_n vom avea $-\varepsilon < u(\mathbf{x}) < +\varepsilon$; cum u nu depinde de ε și deoarece $\varepsilon \to 0$ cînd $R \to \infty$, va rezulta că în D_n' avem $u = 0$. ⌟

Prin *problema Neumann exterioară pentru ecuația Laplace* se înțelege găsirea unei funcții armonice în D_n' de clasă C^1 în D_n', regulată la infinit și care este astfel încît derivata normală ia valori continue date pe ∂D_n.

Astfel, dacă u este funcția căutată, vor trebui să avem verificate condițiile

$$\Delta_n u = 0 \text{ în } D_n', \quad u \in C^1(D_n' \cup \partial D_n), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial D_n} = g_1 \in C^0(\partial D_n),$$

u fiind și regulată la infinit.

Trebuie făcută observația că spre deosebire de cazul problemei Neumann interioare, teorema 3.11 a lui Gauss nu impune nici o restricție asupra funcției g_1, deoarece suprafața ∂D_n nu cuprinde în interiorul ei puncte aparținînd domeniului de armonicitate al funcției.

Teorema 3.39. *Soluția problemei Neumann exterioare este unic determinată.*

⌜ Va fi suficient să arătăm că dacă u este o funcție armonică în D_n', regulată la infinit, de clasă $C^1(D_n' \cup \partial D_n)$, iar $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial D_n} = 0$, atunci $u = 0$ în D_n'. Pentru aceasta vom utiliza din nou domeniul Ω_n care apare în demonstrația teoremei anterioare, pentru care vom scrie formula (3.37) în ipoteza $u = v$; vom obține identitatea

$$\int_{\Omega_n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right] \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial D_n} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}\sigma + \int_{\|\mathbf{x}\|=R} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}\sigma,$$

deoarece $\Delta_n u = 0$, iar $\partial\Omega_n = \partial D_n \cup \{\|\mathbf{x}\| = R\}$; dar pe ∂D_n avem $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, iar integrala calculată $\|\mathbf{x}\| = R$ se va majora în modul următor, dacă ținem cont de regularitatea la infinit a funcției u:

$$\left| \int_{\|x\|=R} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}\sigma \right| \leqslant \int_{\|\alpha\|=1} |u| \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| R^{n-1} \mathrm{d}\omega_n \leqslant \frac{nM^2}{R^{n-2}}, \quad \mathbf{x} = R\alpha,$$

deoarece

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{Mn}{R^{n-2}}.$$

Așadar, făcînd $R \to \infty$, se obține relația

$$\int_{D_n'} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right] \mathrm{d}\mathbf{x} = 0,$$

care este posibilă numai dacă $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, în D_n', adică numai dacă u este constant în D_n'; deoarece u este regulată la infinit, constanta va trebui să fie nulă. ⌟

Pentru a găsi o soluție pentru problema Dirichlet (interioară sau exterioară), se caută soluții de forma unui potențial de dublu strat cu distribuția $\mu \in C_0(\partial D_n)$:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.65}$$

Deoarece în afara lui ∂D_n funcția u este armonică, rămîne de determinat convenabil distribuția μ pentru a se verifica condițiile la frontieră; restricția la domeniul D_n sau D_n' a lui u dat de (3.65) va constitui soluția căutată.

Se poate observa că potențialul de dublu strat este o funcție regulată la infinit (teorema 3.32), așa că mai rămîne de impus condiția la limită $u|_{\partial D_n} = f$ (pentru problema Dirichlet interioară) sau $u|_{\partial D_n} = f_1$ (pentru problema Dirichlet exterioară). Să considerăm la început problema Dirichlet interioară; atunci, folosind relația cunoscută de salt a potențialului de dublu strat, vom obține, plecînd de la egalitatea (3.59):

$$u(\mathbf{x}^-) = u(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} C_n \mu(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \partial D_n,$$

și ținînd seama că $u(\mathbf{x}^-) = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial D_n$, găsim o ecuație integrală de tip Fredholm și de speța a doua pentru funcția μ:

$$\int_{\partial D_n} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} C_n \mu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D_n \tag{3.66}$$

Invers, dacă μ este o soluție continuă acestei ecuații, se poate construi potențialul de dublu strat (3.65) care va fi o funcție armonică în D_n, iar pe ∂D_n va lua valorile

$$u(\mathbf{x}^-) = \int_{\partial D_n} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} C_n \cdot \mu(\mathbf{x})$$

conform cu relația de salt al potențialului de dublu strat la traversarea frontierei ∂D_n; în baza ecuației (3.66) însă se obține $u(\mathbf{x}^-) = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial D_n$.

Vom lăsa deocamdată la o parte problema Dirichlet exterioară și vom căuta să găsim soluția problemei Neumann exterioare cu ajutorul potențialului de simplu strat

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \frac{\mu(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{n-2}} \, d\sigma_y, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.67}$$

care va fi evident o funcție armonică în D_n' și regulată la infinit (conform cu proprietățile demonstrate ale potențialului de simplu strat). Folosind proprietățile la traversare ale derivatei normale a potențialului de simplu strat, precum și condiția de frontieră $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial D_n} = g_1$, vom obține ecuația integrală

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}^+)}{\partial \nu} = g_1(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_x} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) \, d\sigma_y + \frac{1}{2} C_n \mu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D_n, \tag{3.68}$$

care este ecuația adjunctă ecuației integrale anterioare (3.66). Într-adevăr, notînd cu $k_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ și $k_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nucleele celor două ecuații integrale, adică

$$k_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}), \quad k_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n})$$

rezultă imediat $k_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})$; deci conform cu teoria lui Fredholm pentru acest tip de ecuații, ecuațiile (3.60) și (3.68) se tratează împreună. Va trebui însă întîi să stabilim dacă nucleul k_1 admite o singularitate slabă pe ∂D_n, adică dacă admite o majorare de forma $M\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{\alpha}$ cu $\alpha > 1-n$ [deoarece ∂D_n este o varietate $(n-1)$-dimensională] cînd $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D_n$; or, deoarece

$$\frac{\partial (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n})}{\partial \nu_y} = |(2-n)| \, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{1-n} \cos(\mathbf{xy}, \nu_{\mathbf{y}}) \leqslant M \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{1+\beta-n}$$

cu $\beta > 0$, dacă $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ sînt puncte de pe ∂D_n cînd $\mathbf{y} \to \mathbf{x}$, unghiul dintre vectorul de direcție $\mathbf{xy}$ și normala în punctul $\mathbf{y}$ va tinde către $\frac{\pi}{2}$, și deci cosinusul acestui unghi va tinde la 0; deci $\alpha = 1 + \beta - n > 1-n$.

Așadar, ecuațiile în cauză au nucleul cu singularitate slabă și în baza teoriei generale valabile pentru aceste ecuații vom putea folosi alternativa lui Fredholm. Pentru a stabili dacă ecuațiile (3.66) și (3.68) admit soluții, va trebui să considerăm una din ecuațiile integrale omogene corespunzătoare ecuațiilor considerate; vom alege ecuația omogenă corespunzătoare primei ecuații, adică vom căuta soluțiile ecuației

$$\int_{\partial D_n} \mu_0(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \nu_y} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) \, d\sigma_y - \frac{1}{2} C_n \mu_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_n. \tag{3.66'}$$

Dacă $\mu_0 \in C^0(\partial D_n)$ este o soluție nebanală a acestei ecuații, atunci potențialul de dublu strat

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \mu_0(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_y} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) \, d\sigma_y$$

va fi o funcție armonică atît în D_n cît și în D_n' regulată la infinit, care admite valorile nule pe ∂D_n cînd $\mathbf{x}^- \to \mathbf{x} \in \partial D_n$. Deoarece iarăși în baza relației de salt pentru potențialul de dublu strat obținem egalitatea

$$u_0(\mathbf{x}^-) = \int_{\partial D_n} \mu_0(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_y} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) \, d\sigma_y - \frac{1}{2} C_n \mu_0(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in \partial D_n,$$

care în baza faptului că μ_0 verifică ecuația (3.66'), devine $u_0(\mathbf{x}^-) = 0$; or, o funcție armonică în D_n, nulă pe ∂D_n este nulă în $\bar{D}_n$ [facem observația că pe u_0 îl presupunem continuu în D_n, considerînd ca valori ale lui u_0 pe ∂D_n valorile limită $u_0(\mathbf{x}^-)$ ale lui u_0, deci $u_0(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial D_n} = u(\mathbf{x}^-) = \lim_{\mathbf{x}^- \to \mathbf{x} \in \partial D_n} u_0(\mathbf{x}^-)$]. Dar dacă $u_0 = 0$ în D_n, vom avea și $\left.\frac{\partial u_0(\mathbf{x}^-)}{\partial \nu_x}\right|_{\mathbf{x} \in \partial D_n} = 0$, deoarece toate derivatele de ordinul întîi sînt nule în D_n. În baza relației de salt a derivatelor normale ale potențialului de dublu strat, adică deoarece

$$\left.\frac{\partial u_0(\mathbf{x}^-)}{\partial \nu_x}\right|_{\mathbf{x} \in \partial D_n} = \left.\frac{\partial u_0(\mathbf{x}^+)}{\partial \nu_x}\right|_{\mathbf{x} \in \partial D_n}$$

va rezulta că u_0, în domeniul D_n' va putea fi considerat ca soluţia unei probleme Neumann :

$$\Delta_n u_0 = 0, \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right|_{\partial D_n} = 0;$$

în baza regularităţii la infinit a lui u_0 şi a teoremei de unicitate a soluţiei problemei Neumann exterioare, va rezulta $u_0 = 0$ în D_n'.

Aşadar, am stabilit că u_0 definit anterior este nul atît în D_n cît şi în D_n'; or atunci din relaţia de salt a potenţialului de dublu strat, la traversarea frontierei lui D_n, adică din relaţia

$$w(\mathbf{x}^+) - w(\mathbf{x}^-) = C_n\mu(\mathbf{x})$$

pentru potenţialul de dublu strat care îl defineşte pe u_0, vom obţine deoarece $u_0(\mathbf{x}^-) = u_0(\mathbf{x}^+) = 0$, $\mu_0 = 0$.

Aşadar, singura soluţie a ecuaţiei integrale omogene (3.66′) este soluţia banală. Rezultă, în baza alternativei lui Fredholm, că ecuaţiile integrale neomogne (3.66) şi (3.68) admit o singură soluţie continuă, oricare ar fi membrii drepţi, adică oricare ar fi funcţiile continue f şi g_1. În acest mod s-a demonstrat teorema următoare :

Teorema 3.40. *Oricare ar fi valorile la frontieră, atît problema Dirichlet interioară cît şi problema Neumann exterioară admit o singură soluţie.*

Să trecem acum la rezolvarea celorlalte două probleme la limită rămase : problema Neumann interioară şi problema Dirichlet exterioară care ca şi cele două probleme anterioare se vor rezolva simultan.

Pentru problema Neumann interioară vom căuta soluţii de forma unui potenţial de simplu strat ; dacă $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial D_n} = g$, în baza relaţiei de salt a derivatei normale a potenţialului de simplu strat vom obţine egalitatea

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}^-)}{\partial \nu} = g(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{x}}} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} C_n\mu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D_n, \tag{3.69}$$

care constituie iarăşi o ecuaţie integrală pentru $\mu \in C^0(\partial D_n)$ folosind procedeul indicat mai înainte se poate stabili cu uşurinţă că dacă μ

este o soluţie a acestei ecuaţii, atunci potenţialul de simplu strat cu această distribuţie va fi o soluţie a problemei Neumann în cauză.

Pentru problema Dirichlet exterioară, după cum am spus anterior, se caută soluţii de forma unui potenţial de dublu strat, care este evident regulat la infinit, deoarece tinde la zero, cînd $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ tot aşa cum tinde $\|\mathbf{x}\|^{1-n}$. Or în problema Dirichlet exterioară se cere ca $u \to 0$ aşa cum tinde $\|\mathbf{x}\|^{2-n}$; de aceea vom presupune originea sistemului cartezian de axe de coordonate în punctul $\mathbf{z} \in D_n$ şi vom căuta, pentru problema Dirichlet exterioară, soluţii de forma

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a}{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^{n-2}} + \int_{\partial D_n} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.70}$$

pentru a avea comportarea la infinit cerută de definiţia problemei Dirichlet exterioară. Aici a este o constantă care se va determina mai tîrziu iar deoarece $\mathbf{z} \in D_n$, vom avea $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| \neq 0$ pentru orice $\mathbf{x} \in \bar{D}_n'$; impunînd condiţia la frontieră $u|_{\partial D_n} = f_1$, se va obţine ecuaţia integrală

$$\int_{\partial D_n} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} C_n\mu(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) - \frac{a}{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^{n-2}}, \quad \mathbf{x} \in \partial D_n$$

dacă se foloseşte relaţia corespunzătoare de salt a potenţialului de dublu strat. Se constată imediat că ecuaţiile (3.69) şi (3.71) sînt adjuncte una alteia şi deci este suficient să vedem ce se întîmplă cu soluţiile uneia din ecuaţiile omogene corespunzătoare acestor ecuaţii ; vom considera ecuaţia omogenă corespunzătoare ultimei ecuaţii integrale, adică ecuaţia

$$\int_{\partial D_n} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} C_n\mu(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_n, \tag{3.71′}$$

şi fie μ_1 o soluţie continuă a sa. Ca şi anterior, vom considera potenţialul de dublu strat cu distribuţia μ_1 :

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{\partial D_n} \mu_1(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

care va fi o funcție armonică în D_n și în D'_n, nulă la infinit; valorile lui u_1 pe ∂D_n considerate ca valori limită din D'_n se obțin imediat:

$$u_1(\mathbf{x}^+) = \int_{\partial D} \mu_1(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{y}}^i} (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n})\, \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} C_n \mu_1(\mathbf{x}),$$

în cauza relației corespunzătoare de salt a potențialului de dublu strat; în baza ecuației integrale verificate de μ_1 vom avea $u_1(\mathbf{x}^+) = 0$ iar în baza unicității soluției problemei Dirichlet exterioare vom avea $\mu_1(\mathbf{x}) = 0$ dacă $\mathbf{x} \in D'_n$. Or, deoarece $\frac{\partial u_1(\mathbf{x}^+)}{\partial \nu} = 0$, vom avea și $\frac{\partial u_1(\mathbf{x}^-)}{\partial \nu} = 0$ (la traversarea lui ∂D_n, derivatele normale ale potențialului de dublu strat au saltul nul); rezultă că în D_n funcția armonică u_1 poate fi considerată ca soluție a unei probleme Neumann cu date nule pe ∂D_n. Deci, în baza teoremei 3.12, $u_1 = \text{const}$ în D_n; în sfîrșit, din relația de salt

$$u_1(\mathbf{x}^+) - u_1(\mathbf{x}^-) = -C_n \mu_1(\mathbf{x})$$

rezultă $\mu_1(\mathbf{x}) = k$, $\mathbf{x} \in \partial D_n$, k fiind o constantă. Așadar, ecuația integrală omogenă (3.71) admite soluții nenule, spațiul acestor soluții avînd dimensiunea unu, iar ecuația integrală omogenă

$$\int_{\partial D_n} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \nu_{\mathbf{x}}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n})\, \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} C_n \mu(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_n,$$

va admite o singură soluție nebanală (exceptînd evident un factor constant multiplicativ) pe care o notăm cu μ_2.

Utilizînd alternativa lui Fredholm va rezulta că ecuația (3.69) va admite soluții dacă și numai dacă termenul ei liber, adică dacă și numai dacă funcția g este ortogonală în ∂D_n pe soluția ecuației omogene (3.71′), adică numai dacă $(1, g) = 0$, notînd

$$(1, g) = \int_{\partial D_n} g(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\sigma,$$

Ecuația (3.71) va admite soluții dacă și numai dacă avem verificată condiția de ortogonalitate

$$\left(f_1(\mathbf{x}) - \frac{a}{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^{n-2}},\ \mu_2(\mathbf{x}) \right) = 0;$$

se constată imediat că pe cînd prima condiție de ortogonalitate reprezintă o condiție restrictivă pentru g, a doua condiție de ortogonalitate nu este o condiție restrictivă, ci condiție pentru determinarea constantei a:

$$a = \frac{(f_1(\mathbf{x}),\ \mu_2(\mathbf{x}))}{(\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^{2-n}, \mu_2(\mathbf{x}))},$$

care este unic determinată și nenulă deoarece $\mu_2 \neq 0$ (numitorul relației anterioare este diferit de zero deoarece $\mu_2 \neq 0$ și acesta este în fond un potențial de simplu strat care nu poate fi nul pentru $\mathbf{z} \in \partial D_n$ decît dacă distribuția sa este nulă pe ∂D_n).

Prin urmare, am demonstrat teorema următoare:

Teorema 3.41 (*de existență pentru soluțiile problemei Dirichlet exterioară și Neumann interioară*). *Problema Dirichlet exterioară admite o singură soluție, oricare ar fi datele la frontieră f_1. Pentru ca problema Neumann interioară să admită o soluție, este necesar și suficient ca să se verifice condiția de ortogonalitate*

$$\int_{\partial D_n} g(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\sigma = 0.$$

În acest mod, această teoremă completează considerțiile făcute anterior odată cu definiția problemei Neumann interioare.

Considerațiile din acest paragraf arată clar importanța teoriei potențialului pentru studiul problemelor la limită pentru ecuația Laplace; amintim că aceste considerații valabile pentru ecuații de tip eliptic cu coeficienți constanți sînt valabile și pentru ecuațiile de tip eliptic generale cu coeficienți variabili (vezi 3.2.4).

CAPITOLUL 4

Ecuații de tip parabolic

4.1. Prima problemă mixtă pentru ecuații de tip parabolic normal

4.1.1. Soluții slabe pentru prima problemă mixtă

Vom lua în considerație ecuații de tip parabolic de forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})\ u = F(t, \mathbf{x}), \tag{4.1}$$

în care L este un operator diferențial de ordinul al doilea, uniform eliptic în domeniul mărginit $D_n \subset \mathbb{R}^n$, factorul perturbator F fiind o funcție cunoscută în $\bar{Q}$, unde $Q =]0, T[\times D_n$.

A rezolva prima problemă mixtă pentru ecuația (4.1) înseamnă a găsi o soluție (clasică sau generalizată) în Q a acestei ecuații care verifică atît condiția inițială

$$u(t, \mathbf{x})|_{t=0} = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in D_n, \tag{4.2}$$

cît și condiția la limită (de tip Dirichlet)

$$u(t, \mathbf{x})|_{\partial D_n} = g(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D_n \quad t \in [0, T]. \tag{4.3}$$

Cu ajutorul considerațiilor din cap. 4, vol. II, se poate obține ușor soluția primei probleme mixte pentru ecuația (4.1), utilizînd coercivitatea operatorilor uniform eliptici (dedusă în 3.1); se deduce posibilitatea aplicării metodei separării variabilelor, soluției ecuației (4.1) omogene corespunzătoare lui $f \neq 0$ și $g = 0$ din condițiile (4.2) și (4.3). Se obține

$$u_h(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, v_j)_0\, \mathrm{e}^{-\lambda_j t} v_j(\mathbf{x}), \tag{4.4}$$

unde $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ este șirul valorilor proprii corespunzător problemei la limită

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}, D)v = \lambda v, \qquad v|_{\partial D_n} = 0,$$

iar $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ este șirul funcțiilor proprii corespunzătoare. Este ușor de verificat faptul că u_h definit prin (4.4) definește o *soluție slabă a problemei în cauză*, soluția problemei generale (cu $F \neq 0$, $g \neq 0$) obținîndu-se succesiv din soluția (4.4), prin utilizarea algoritmului din cap. 4, vol. II.

4.1.2. Unicitatea soluției primei probleme mixte pentru ecuația căldurii

Vom lua în considerație cazul în care operatorul L din (4.1) are coeficienți constanți. Atunci, în baza teoriei generale expuse în 1.5, se poate presupune ecuația (4.1) avînd forma ecuației căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = F(t, \mathbf{x}), \tag{4.5}$$

Δ_n fiind operatorul lui Laplace din $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.1. (*principiul de maxim*). *Dacă $u = u(t, \mathbf{x})$ este o funcție continuă în $\bar{Q}$ verificînd ecuația omogenă*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = 0 \tag{4.5'}$$

în $Q \cup H$ (unde H este baza superioară a cilindrului Q), atunci u își atinge valorile extreme pe $\partial Q \setminus H$.

⌜ Deoarece $u \in C^0(\bar{Q})$, conform cu teorema lui Weierstrass, această funcție își va atinge efectiv în $\bar{Q}$ valorile maxime, respectiv minime; să notăm $M = \max_{\bar{Q}} u(t, \mathbf{x})$, $m = \max_{\partial Q \setminus H} u(t, \mathbf{x})$ și să presupunem că va exista o soluție u a ecuației (4.5′) astfel încît $m < M$. Fie $M = u(t_0, \mathbf{x}_0)$, $(t_0, \mathbf{x}_0) \in H \cup Q$ și să considerăm funcția ajutătoare

$$v(t, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x}) + \frac{M - m}{4d^2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2, \tag{4.6}$$

unde d este diametrul lui D_n. Din (4.6) rezultă $v(t_0, \mathbf{x}_0) = u(t_0, \mathbf{x}_0) = M$, deci valorile maxime ale lui v în $\bar{Q}$ nu vor fi mai mici decît M. Pe $\partial Q \setminus H$ avem

$$v(t, \mathbf{x}) \leqslant m + \frac{M - m}{4} = \frac{1}{4} M + \frac{3}{4} m < M$$

deoarece $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leqslant d$); deci funcția v ca și funcția u nu poate avea valorile maxime din $\bar{Q}$ pe $\partial Q \setminus H$. Să presupunem că valoarea maximă pentru v se atinge în $(\mathbf{x}^*, t^*) \in Q \cup H$ și în baza condițiilor necesare de extrem, în acest punct avem

$$\frac{\partial v(t^*, \mathbf{x}^*)}{\partial t} \geqslant 0, \quad \Delta_n v(t^*, \mathbf{x}^*) \leqslant 0$$

$\Big[$dacă $t^* < T$, avem $\dfrac{\partial v(t^*, \mathbf{x}^*)}{\partial t} = 0$, iar dacă $t^* = T$, atunci $\dfrac{\partial v(t^*, \mathbf{x}^*)}{\partial t} \leqslant 0\Big]$, ceea ce antrenează

$$\frac{\partial v(t^*, \mathbf{x}^*)}{\partial t} - \Delta_n v(t^*, \mathbf{x}^*) \geqslant 0. \tag{4.6′}$$

Dar din (4.6) rezultă

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta_n v = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u\right) - \frac{M - m}{4d^2} \Delta_n(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2) = -\frac{(M - m)n}{2d^2} < 0,$$

ceea ce contrazice (4.6′); deci trebie să presupunem $m \geqslant M$ și cum $m > M$ nu este posibil, neapărat $m = M$. Pentru valoarea minimă de-

monstrația este analoagă [sau se poate face observația că odată cu u și $-u$ verifică (4.5′) iar valorile minime ale lui u vor coincide cu valorile maxime ale lui $-u$].

Din teorema 4.1 se deduc imediat consecințele următoare:

I. *Dacă $u \in C^0(\bar{Q})$ verifică în $Q \cup H$ ecuația (4.5′) și este nulă pe $\partial Q \setminus H$, atunci $u(t, \mathbf{x}) = 0$, $(t, \mathbf{x}) \in \bar{Q}$* [deoarece valorile maxime și valorile minime se ating pe $\partial Q \cup H$, deci vor fi nule, adică $\underline{u} \leqslant u(t, \mathbf{x}) \leqslant \bar{u}$, $(t, \mathbf{x}) \in \bar{Q}$ și cum $\bar{u} = 0$, $\underline{u} = 0$, avem $u(t, \mathbf{x}) = 0$, $(t, \mathbf{x}) \in \bar{Q}$].

II. *Dacă u și v sînt funcții continue în $\bar{Q}$ și verifică ecuația (4.5′) în $Q \cup H$, dacă $u \leqslant v$ pe $\partial Q \setminus H$, atunci $u(t, \mathbf{x}) \leqslant v(t, \mathbf{x})$, oricare ar fi $(t, \mathbf{x}) \in \bar{Q}$* [deoarece funcția $v - u$ va fi continuă în $\bar{Q}$, va verifica ecuația (4.5′) în $Q \cup H$ și va fi nenegativă pe $\partial Q \setminus H$, deci minimul funcției $v - u$ nu va fi negativ, adică $v(t, \mathbf{x}) - u(t, \mathbf{x}) \geqslant 0$ în $\bar{Q}$].

III. *Dacă u și v [$v(t, \mathbf{x}) \geqslant 0$ în $\bar{Q}$] sînt funcții continue în $\bar{Q}$ și verifică ecuația (4.5′) în $Q \cup H$, dacă $|u| \leqslant v$ pe $\partial Q \setminus H$, atunci $|u| \leqslant v$ peste tot în $\bar{Q}$* [deoarece pe $\partial Q \setminus H$ avem $-v \leqslant u \leqslant v$ și nu avem decît să aplicăm consecința II perechilor $(-v, u)$ și (u, v)].

Teorema 4.2 (*de unicitate*). *Prima problemă mixtă pentru ecuația căldurii* (4.5) *admite cel mult o soluție clasică.*

⌜ Dacă $u_1, u_2 \in C^0(\bar{Q})$ ar verifica atît ecuația (4.5) cît și condițiile (4.2) și (4.3), atunci diferența $u = u_1 - u_2$ va verifica ecuația (4.5′) și va fi nulă pe $\partial Q \setminus H$; consecința I arată că $u(t, \mathbf{x}) = 0$ în $\bar{Q}$, deci $u_1 = u_2$ în $\bar{Q}$. ⌟

Teorema 4.3 (*de stabilitate*). *Dacă u_1 și u_2 verifică ecuația (4.5) iar*

$$u_1(t, \mathbf{x})|_{t=0} = f_1(\mathbf{x}), \; u_2(t, \mathbf{x})|_{t=0} = f_2(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in D_n$$

$$u_1(t, \mathbf{x})|_{\partial D_n} = g_1(t, \mathbf{x}), \; u_2(t, \mathbf{x}|_{\partial D_n} = g_2(t, \mathbf{x}), \; \mathbf{x} \in \partial D_n, \; 0 \leqslant t \leqslant T$$

atunci dacă $|f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon$, $|g_1(t, \mathbf{x}) - g_2(t, \mathbf{x})| \leqslant \varepsilon$, în $\bar{Q}$ avem

$$|u_1(t, \mathbf{x}) - u_2(t, \mathbf{x})| \leqslant \varepsilon.$$

⌜ Diferența $u = u_1 - u_2$ verifică ecuația omogenă (4.5′) iar $|u| \leqslant \varepsilon$ pe $\partial Q \setminus H$ iar consecința III de mai sus implică $|u| = |u_1 - u_2| \leqslant \varepsilon$ în $\bar{Q}$. ⌟

1°. Fie $u_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{l} x$ soluția ecuației $\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ care verifică condițiile la limită omogene $u_k(t, 0) = u_k(t, l) = 0$ și condiția inițială $u_k(t, x)|_{t=0} = u_0(x)$ [deci $a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(y) \sin \frac{k\pi}{l} y \, dy$]. Să se arate că seria

$$u_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, x), \; u_k(t, x) = a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{l} x$$

este uniform convergentă în dreptunghiul $\bar{Q} = [0, l] \times [0, T]$ dacă $\int_0^l u_0'^2(x)\, dx < +\infty$.

Să se arate că și seriile $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial x}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$ sînt uniform convergente în $Q \cup H =]0, l[\times]0, T[$ și verifică ecuația $\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

R. Pentru $t \in [0, T]$ avem $0 < e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \leqslant 1$ și rezultă că seria $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, x)$ se va majora prin seria trigonometrică de sinusuri $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x$ care este uniform convergentă. Pentru seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{l} x$$

se poate raționa astfel: oricare ar fi $t > 0$, se poate găsi $t_0 > 0$ fixat astfel ca $t_0 \leqslant t$ și de aceea va fi suficient să demonstrăm convergența uniformă a seriei pentru $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$, cînd are loc șirul de inegalități

$$0 < \left(\frac{k\pi a}{l^2}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \leqslant \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t_0} < 1$$

pentru k suficient de mare (deoarece $e^{-\alpha}$ tinde la zero mai repede decît orice putere a lui α cînd $\alpha \to +\infty$); deci seria $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t}$ se va majora iarăși prin seria $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x$; la fel se procedează și pentru celelalte serii. În baza rezultatului care afirmă că orice serie uniform convergentă are suma funcție continuă, rezultă că $u_0 \in C^0(\bar{Q})$ iar $\frac{\partial u_k}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \in C^0(Q \cup H)$ și de aceea putem scrie $\frac{1}{a^2}\frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right) = 0$, deoarece $\frac{1}{a^2}\frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

2°. Se cere legea de propagare a temperaturii într-o bară de lungime l a cărei suprafață laterală cît și capetele sînt izolate termic față de exterior.

R. Ecuația de propagare este $\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; condiția inițială se scrie $u(t, x)\Big|_{t=0} = u_0(x)$ iar condițiile la limită sînt $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0$ (adică variația de temperatură la capete este nulă). Se aplică metoda separării variabilelor și se obțin valorile proprii $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$ iar funcțiile proprii sînt $v_k = \cos \frac{k\pi}{l} x$, $k = 0,1,2,\ldots$, deci

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{k\pi}{l} x$$

și în baza relațiilor de ortogonalitate $\int_0^l \cos \frac{k\pi}{l} x \times \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{l}{2}\delta_{kn}$, se obțin coeficienții $b_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(y) \cos \frac{k\pi}{l} y \, dy$; deci funcția Green corespunzătoare acestei probleme la limită va fi $G(t, x, y) = \frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \times \cos \frac{k\pi}{l} x \cos \frac{k\pi}{l} y$.

3°. Să se determine legea de propagare a căldurii într-o bară izolată termic pe suprafața laterală care are capătul stîng izolat termic față de exterior iar capătul celălalt este menținut la temperatură nulă.

R. Trebuie integrată ecuația $\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ în condițiile $u\Big|_{t=0} = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$, $u\Big|_{x=l} = 0$. Metoda separării variabilelor conduce la valorile proprii $\lambda_k = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right]^2$, $k = 0,1,2,\ldots$, și la funcțiile proprii $v_k(x) = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x$; soluția va fi $u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k a^2 t} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x$ iar $c_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(y) \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} y \, dy$; funcția Green corespunzătoare acestei probleme la limită este $G(t, x, y) = \frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k a^2 t} \times \cos \sqrt{\lambda_k} x \cos \sqrt{\lambda_k} y$.

4°. O bară de lungime l izolată termic față de exterior (atît la suprafața laterală cît și la capete) are temperatura inițială constantă. Se cere temperatura în bară.

R. Caz particular al problemei 2 cu $u_0 = \text{const}$ ce face ca

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0 \cos\frac{k\pi}{l}\,y\,dy = \frac{2u_0}{l}\int_0^l \cos\frac{k\pi}{l}\,y\,dy = \begin{cases} 2u_0 \text{ pentru } k = 0, \\ 0 \text{ pentru } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Deci $u(t, x) = \frac{b_0}{2} = u_0$ și se obține un rezultat evident din punct de vedere fizic: în condițiile problemei temperatura în bară nu se modifică în raport cu temperatura inițială.

5°. O bară de lungime l izolată termic față de exterior în toate părțile ei are temperatura inițială constantă, egală cu u_0 pentru $0 < x < \frac{l}{2}$ și temperatura nulă pentru $\frac{l}{2} < x < l_0$. Se cere distribuția de temperaturi din bară.

R. Caz particular al problemei 2 cu $u_0(x) = \begin{cases} u_0, & 0 < x < \frac{l}{2}, \\ 0, & \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$

Efectuînd calulele, se obține

$$u(t, x) = \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\frac{(2k+1)}{l}\,x\,e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}.$$

6°. În condițiile problemei 5, se cere u dacă

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{2u_0}{l}x, & 0 < x < \frac{l}{2}, \\ \frac{2u_0}{l}(l-x), & \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

R. $u(t, x) = \frac{u_0}{2} - \frac{4u_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(4k+2)\pi}{l}\,x\,e^{-\frac{(4k+2)^2\pi^2a^2}{l^2}t}$

7°. Se dă o bară de lungime l (termoizolată la suprafața laterală), capetele ei se mențin la temperaturi constante: $u\big|_{x=0} = A$, $u\big|_{x=l} = B$ iar în interior bara are temperatura inițială constantă $u\big|_{t=0} = u_0$ pentru $0 < x < l$. Se cere u.

R. Scriind $u(t, x) = v(t, x) + A + \frac{x}{l}(B - A)$, u fiind soluția cerută, atunci v va

verifica $\frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$, condiția inițială $v\big|_{t=0} = u_0 - A - \frac{x}{l}(B - A)$ și condițiile la limite $v\big|_{x=0} = v\big|_{x=l} = 0$, deci

$$v(t, x) = \frac{2}{\pi}(u_0 - A)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{l}\,x\,e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}} + \\ + \frac{2}{\pi}(B - u_0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi}{l}\,x\,e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}}.$$

8°. Într-o bară de lungime l (izolată termic față de exterior la suprafața laterală), capetele sînt încălzite la aceeași temperatură constantă A iar temperatura inițială este $u_0(x) = \frac{2u_0}{l}x$, dacă $0 < x \leqslant \frac{l}{2}$ și $u_0(x) = \frac{2u_0}{l}(l - x)$, dacă $\frac{l}{2} \leqslant x < l$. Să se arate că temperatura în bară este dată de

$$u(t, x) = u_0 - \frac{4}{\pi}A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}\,x\,e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t} + \\ + \frac{8}{\pi^2}A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}\,x\,e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}.$$

9° La o bară de lungime l (cu suprafața laterală termoizolată), capătul din stînga este termoizolat iar cel din dreapta este supus la o temperatură constantă A. Se cere u, știind că temperatura inițială a barei este $u\big|_{t=0} = u_0 = \text{const}$.

R. Cu schimbarea de funcție $u = A + v$, avem pentru v condițiile: verifică ecuația $\frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$, condiția inițială $v\big|_{t=0} = u_0 - A$ și condițiile la limită $\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$, $v\big|_{x=l} = 0$, deci v se obține prin exercițiul 3; în final:

$$u(t, x) = A + \frac{4}{\pi}(u_0 - A)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}\,x\,e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}.$$

10°. În condițiile exercițiului 9, să se determine u dacă temperatura inițială este $u(t, x)\big|_{t=0} = \frac{u_0}{l}x$.

R. $u(t,x) = A + \frac{4}{\pi}(u_0 - A)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}\,x\,e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t} - \\ - \frac{8u_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}\,x\,e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}.$

11°. Tot în condițiile exercițiului 9, să se arate că dacă $u|_{t=0} = \frac{u_0}{l}(l - x)$, $0 < x < l$, atunci

$$u(t,x) = A - \frac{4}{\pi} A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2l} x\, e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} t} +$$

$$+ \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2l} x\, e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} x}.$$

12°. Să se integreze ecuația $\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ în condiția inițială $u\Big|_{t=0} = u_0(x)$ și în condițiile la limită $h_0 u(t,0) - k\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$, $h_1 u(t,l) + k\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0$, k, h_0 și h_1 fiind constante pozitive date.

R. Pentru a aplica metoda separării variabilelor este necesară determinarea funcțiilor și valorilor proprii, care se obțin din rezolvarea sistemului $v(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$, $h_0 v(0) - k v'(0) = 0$, $h_1 v(l) + k v'(l) = 0$; deci constantele c_1 și c_2 vor trebui să fie soluțiile nenule ale sistemului algebric

$$h_0 c_1 - k\sqrt{\lambda}\, c_2 = 0, \quad c_1 [k\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} l) - h_1 \cos(\sqrt{\lambda} l)] -$$

$$- c_2 [h_1 \sin(\sqrt{\lambda} l) + k\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l)] = 0.$$

Scriind că determinantul coeficienților este nul, se va obține ecuația

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\, l = \frac{k(h_0 + h_1)\sqrt{\lambda}}{k^2\lambda - h_0 h_1},$$

care este verificată de valorile proprii; determinarea acestora nu se poate face exact iar grafic se poate arăta că există o infinitate numărabilă de valori proprii; într-adevăr, notînd $\sqrt{\lambda} l = \mu$, ecuația devine $\operatorname{tg}\mu = \frac{k(h_0 + h_1) l\mu}{k^2\mu^2 - h_0 h_1 l^2}$. Punctele de intersecție ale curbelor $\nu = \operatorname{tg}\mu$ și $\nu = \frac{k(h_0 + h_1) l\mu}{k^2\mu^2 - h_0 h_1 l^2}$ vor fi valorile care ne interesează; or este evident că cele două grafice se vor intersecta de o infinitate de ori (vezi fig. 4.1); rezultă de asemenea că dacă $\mu_j > 0$ este abscisa unui punct de intersecție a celor două grafice, atunci și $-\mu_j$ este abscisa unui alt punct de intersecție și de aceea este suficient să se considere doar abscise pozitive și vom avea $\lambda_j = \frac{\mu_j^2}{l^2} \geqslant 0$; funcțiile proprii vor fi

$$v_j(x) = k\mu_j \cos(\mu_j x) + h_0 \sin(\mu_j x), \qquad j \geqslant 0,$$

iar soluția

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-a^2\lambda_j t} v_j(\mathbf{x}),$$

constantele a_j determinîndu-se cu ajutorul condiției inițiale; funcțiile proprii formează un sistem ortogonal de funcții pe intervalul $[0, l]$.

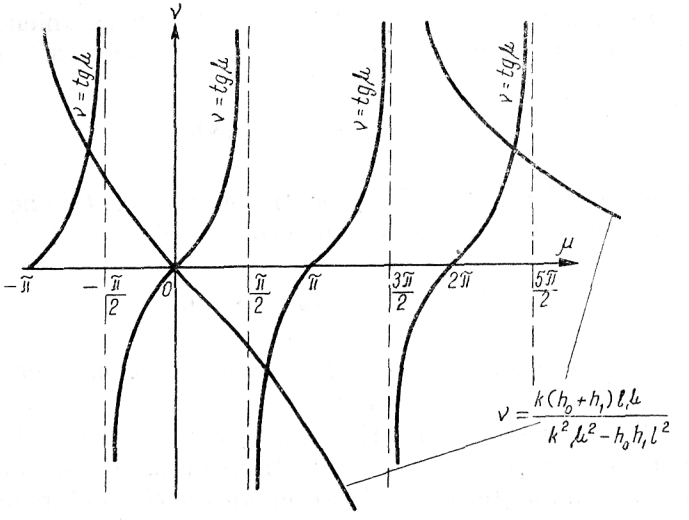

Fig. 4.1

4.2. Teoria semigrupurilor și problema Cauchy

Să presupunem că ecuația (4.1) este astfel încît $F = 0$; în caz contrar, prin aplicarea principiului lui Duhamel, soluția ecuației neomogene rezultă direct din posibilitatea determinării soluției ecuației omogene pentru orice date inițiale. În aceste condiții, să presupunem că datele inițiale determină unic soluția ecuației (4.1) omogene. Fie $u = u(t, \mathbf{x})$ soluția determinată astfel încît $u|_{t=0} = u_0(\mathbf{x})$. Vom putea scrie

$$u(t, \mathbf{x}) = A_t\, u_0(\mathbf{x}).$$

A_t fiind operatorul care conduce de la $u_0(\mathbf{x})$ la soluția $u = u(t, \mathbf{x})$, pentru un t dat. În acest mod se determină familia de operatori (A_t) care depinde de un parametru t nenegativ. Evident, $A_t|_{t=0} = I$(= operatorul identic). Deoarece ecuația (4.1) omogenă nu depinde de t, dacă $u(t, \mathbf{x})$ este o soluție a acesteia, atunci funcția $u(t + s, \mathbf{x})$ va fi de asemenea o soluție a aceleiași ecuații, care pentru $t = 0$ devine $u(s, \mathbf{x})$; or $u(s, \mathbf{x}) = A_s u_0(\mathbf{x})$ $(t \geqslant 0,\ s \geqslant 0)$.

Prin urmare, deoarece pe de o parte $u(t + s,\ \mathbf{x}) = A_{t+s}\ u_0(\mathbf{x})$, iar pe de altă parte $u(t + x, \mathbf{x}) = A_t[A_s\ u_0(\mathbf{x})]$, în baza unicității acestei soluții, vom avea egalitatea

$$A_{t+s}\, u_0(\mathbf{x}) = A_t A_s\, u_0(\mathbf{x}),$$

valabilă pentru orice $u_0 \in L^2(D_n)$ și pentru orice valori t și s nenegative. Această egalitate se poate scrie sub forma

$$A_{t+s} = A_t A_s,\ t \geqslant 0,\ s \geqslant 0,$$

și deci familia de operatori $(A_t)_{t \geqslant 0}$ formează un *semigrup de operatori* conform cu definiția următoare:

O familie de operatori liniari și continui (A_t) care depind de un parametru t și care pentru orice $t \geqslant 0$, transformă spațiul Banach X în el însuși, se numește un *semigrup de operatori*, dacă pentru orice $t, s \in [0, \infty]$ avem

$$A_t A_s = A_{t+s}, \qquad A_0 = I.$$

Dacă însă pentru toți operatorii A_t se poate defini operatorul invers A_t^{-1}, atunci punînd $A_{-t} = A_t^{-1}$, semigrupul anterior de operatori se transformă într-un *grup de operatori* ce depind de un parametru.

Cel mai simplu semigrup de operatori se poate defini astfel: fie $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ și prin definiție

$$A_t f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + t),\ f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leqslant p < \infty, \qquad t \geqslant 0,$$

$\mathbf{x} + t = (x_1 + t, \ldots, x_n + t)$. Evident, în acest caz t poate fi considerat număr real arbitrar, deci s-a definit un grup de operatori în $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Fie acum B un operator liniar și mărginit definit în spațiul Banach X și cu valori în X; deci $\|B\| < \infty$. Cu ajutorul acestui operator se poate obține funcția-operator exponențială e^{tB}, punînd prin definiție

$$e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k B^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k B^k \tag{4.7}$$

și este ușor de verificat că pentru orice t fix și orice $x \in X$ avem $e^{tB} x \in X$. Într-adevăr, notînd

$$y_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!} t^k B^k x,$$

vom găsi imediat evaluarea $(j' > j)$:

$$\|y_j - y_{j'}\| = \left\| \left(\sum_{k=j+1}^{j'} \frac{1}{k!} t^k B^k \right) x \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=j+1}^{j'} \frac{1}{k!} t^k B^k \right\| \|x\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=j+1}^{j'} \frac{1}{k!} |t|^k \|B\|^k \|x\|,$$

deoarece $\|B^k\| \leqslant \|B\|^k$. Cum seria $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |t|^k \|B\|^k$ este uniform convergentă (în raport cu t), evident, se pot alege j și j' astfel încît $\sum_{k=j+1}^{j'} \frac{1}{k!} |t|^k \|B\|^k < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ și deci șirul $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ va fi un șir Cauchy în X. Deci va exista $\lim_{j \to \infty} y_j$ și această limită va defini opertorul e^{tB}.

Efectuînd produsul $e^{tB} \cdot e^{sB} = e^{sB} \cdot e^{tB}$ se va obține evident $e^{(t+s)B}$ și deci va fi valabilă relația de semigrup:

$$e^{tB} \cdot e^{sB} = e^{(t+s)B} \quad t, s \in [0, +\infty[,$$

deoarece, evident, $e^{0B} = 1$. Notînd deci $A_t x = e^{tB} x$, vom obține un alt exemplu de semigrup de operatori definiți pe un spațiu Banach X cu valori în X și cu $A_t^{-1} = e^{-tB}$ acest semigrup se transformă într-un

grup. Plecînd de la definiția (4.7) pentru operatorii $A_t = e^{tB}$, găsim imediat relația (valabilă pentru orice $x \in X$)

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(A_h x - x) - Bx\right\| = \lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(e^{hB} - I)x - Bx\right\| =$$

$$= \lim_{h\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{k-1}}{k!}B^k x - Bx\right\| = \lim_{h\to\infty}\left\|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}}{k!}B^k x\right\| = 0.$$

Deci Bx va fi derivata forte (adică convergența este considerată în topologia generată de norma definită în X) în punctul $t = 0$ a familiei cu un parametru $(A_t\, x = e^{tB}x)_{t\geqslant 0}$.

Dacă pentru un semigrup oarecare $(A_t)_{t\geqslant 0}$ de operatori există un operator Λ cu proprietatea că pentru orice $x \in X$ avem

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{A_h x - Ix}{h} - \Lambda x\right\| = 0,$$

atunci Λ poartă denumirea de *generatorul infinitezimal* al semigrupului (A_t).

În cazul în care $A_t = e^{tB}$, B fiind un operator liniar și mărginit, avem $\Lambda = B$, iar dacă $A_t f = f(\mathbf{x} + t)$, va rezulta $\Lambda = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}$, iar mulțimea de definiție pentru Λ va fi $H^1(\mathbb{R}^n)$ dacă $X = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dacă există operatorul infinitezimal Λ al semigrupului $(A_t)_{t\geqslant 0}$, atunci vom putea scrie egalitățile

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(A_{t+h} - A_t)\, x = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(A_t A_h - A_t)\, x = A_t\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(A_h - I)\, x\right] =$$

$$= A_t(\Lambda x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(A_h - I)\, A_t x = \Lambda(A_t x),$$

unde $t \in [0, \infty[$ iar $x \in X$.

Dacă operatorul B nu este mărginit în X, atunci evident nu se va putea defini familia de operatori e^{tB} ca în modul indicat mai sus.

Vom spune că semigrupul de operatori $(A_t)_{t\geqslant 0} \in (C_0)$, dacă acesta este continuu forte pentru $0 \leqslant t < \infty$, adică funcția $t \to F(t) = A_t x$, $x \in X$, este continuă în norma din X. Deoarece și funcția $t \to G(t) = \|A_t x\|$ este continuă pentru $t \in [0,1]$, va fi și uniform continuă, deci pentru orice $t \in [0,1]$ avem $\|A_t\| \leqslant M$, unde $M > 0$ este independent de t și poate fi presupus supraunitar.

Fie $[t]$ partea întreagă a numărului $t \in \mathbb{R}_+$. Atunci $t - [t] \in [0,1]$; deci pentru un $t \geqslant 0$ arbitrar, putem scrie

$$\|A_t\| = \|A_{t-[t]+[t]}\| = \|A_{[t]} \cdot A_{t-[t]}\|.$$

Dar $\|A_{t-[t]}\| \leqslant M$ și cum $[t]$ este număr întreg nenegativ, avem $\|A_{[t]}\| \leqslant M^{[t]}$. Prin urmare, găsim inegalitatea

$$\|A_t\| \leqslant \|A_{[t]}\| \cdot \|A_{t-[t]}\| \leqslant M \cdot M^{[t]}$$

și determinîndu-l pe β astfel încît $M^{[t]} = e^{\beta t}$, deci $\beta = \frac{[t]}{t}\ln M > 0$, căci $\frac{[t]}{t} < 1$ iar $M > 1$.

Așadar, pentru orice semigrup de operatori $(A_t)_{t\geqslant 0}$ uniform continuu, există constantele $M > 0$ și $0 < \beta < \infty$ astfel încît

$$\|A_t\| \leqslant M\, e^{\beta t} \text{ pentru } t \in [0, \infty]. \tag{4.8}$$

Din (4.8) va rezulta că dacă notăm $T_t = A_t\, e^{-\beta t}$, $(T_t)_{t\geqslant 0}$ va fi de asemenea un semigrup de clasă (C_0) iar $\|T_t\| \leqslant M$, M fiind independent de t; acest semigrup este deci uniform mărginit iar dacă în plus $M < 1$, vom avea un semigrup de contracții.

Fie Λ generatorul infinitezimal al semigrupului de operatori $(A_t)_{t\geqslant 0}$ de clasă (C_0) și fie $\mathcal{D}(\Lambda)$ domeniul de definiție al acestui operator; în general $\mathcal{D}(\Lambda) \neq X$, deoarece în general, pentru $x \in X$, funcția $t \to A_t x$ nu este derivabilă și deci $x \in \mathcal{D}(\Lambda)$ dacă $x \in X$ și dacă funcția $t \to A_t\, x$ este derivabilă (forte) pentru orice $t \geqslant 0$. Prin urmare, avem $\mathcal{D}(\Lambda) = \left\{x \,\middle|\, x \in X, \frac{A_h x - x}{h} \text{ converge în } X \text{ (forte)} \right.$ $\left.\text{cînd } h \to 0\right\}$.

Teorema 4.4. *Dacă* $x \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *atunci* $A_t x \in \mathcal{D}(\Lambda)$ *și este valabilă formula de derivare*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_t x) = \Lambda A_t x = A_t \Lambda x$$

pentru $t \in [0, \infty[$, *unde* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ *este derivata forte.*

⌜ Să notăm

$$\Lambda_t = \frac{A_t - I}{t}$$

și fie $t' > t$ iar $s = t' - t$; vom putea scrie

$$\frac{(A_{t'} - A_t)x}{t' - t} = \frac{(A_{t+s} - A_t)x}{s} = \frac{(A_t A_s - A_t)x}{s} =$$

$$= A_t \frac{(A_s - I)x}{s} = A_t \Lambda_s x = \Lambda_s A_t x.$$

Deoarece $\Lambda_s y \to \Lambda y$ cînd $s \to 0$, $y \in \mathcal{D}(\Lambda)$ iar

$$\lim_{t' \to t} \frac{(A_{t'} - A_t)x}{t' - t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_t x),$$

teorema este demonstrată, fiindcă va rezulta $A_t x \in \mathcal{D}(\Lambda)$ și $\Lambda A_t x = A_t \Lambda x$ pentru $x \in \mathcal{D}(\Lambda)$ și $t \in [0, \infty[$. ⌟

Integrînd formula obținută la teorema 4.4, se va obține o formă echivalentă

$$A_t x - x = \int_0^t A_s \Lambda x \, \mathrm{d}s \tag{4.9}$$

valabilă pentru $x \in \mathcal{D}(\Lambda)$ și $t \in [0, \infty[$.

Teorema 4.5. *Operatorul* Λ *este închis iar* $\overline{\mathcal{D}(\Lambda)} = X$.

⌜ Fie $y \in X$, $t > 0$, $h > 0$; ținînd seama de definiția lui Λ_h, cu $x = A_t y \in \mathcal{D}(\Lambda)$, conform cu teorema 4.4, vom avea

$$\Lambda_h x = \frac{A_h x - x}{h} = \frac{A_h A_t y - A_t y}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}[A_{t+h} y - A_t y] = \frac{1}{h} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_t^{t+h} A_s y \, \mathrm{d}s$$

și deci, prin integrare, găsim

$$\Lambda_h \int_0^t A_s y \, \mathrm{d}s = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} A_s y \, \mathrm{d}s - \frac{1}{h} \int_0^h A_s y \, \mathrm{d}s.$$

Prin trecere la limită, pentru $h \to 0$ găsim relația

$$\lim_{h \to 0} \Lambda_h \int_0^t A_s y \, \mathrm{d}s = A_t y - y$$

care arată că $\int_0^t A_s y \, \mathrm{d}s \in \mathcal{D}(\Lambda)$, deoarece membrul al doilea al egalității anterioare are sens pentru orice $y \in X$. Deoarece $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t A_s y \, \mathrm{d}s = y$, va rezulta că orice element $y \in X$ poate fi aproximat cu ajutorul normei din X, prin elemente de forma $\frac{1}{t} \int_0^t A_s y \, \mathrm{d}s$ care aparțin lui $\mathcal{D}(\Lambda)$. Deci $\overline{\mathcal{D}(\Lambda)} = X$.

Pentru a arăta că Λ este un operator închis, fie $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un șir din $\mathcal{D}(\Lambda)$, $x_k \to x_0 \in X$, $\Lambda x_k \to y_0 \in X$ pentru $k \to \infty$. Din formula (4.9) va rezulta

$$\Lambda_h x_k = \frac{1}{h} \int_0^h A_s \Lambda x_k \, \mathrm{d}s \tag{4.10}$$

iar din evaluarea (4.8), va rezulta

$$\lim_{k\to\infty} \|A_t(\Lambda x_k - y_0)\| \leqslant \lim_{k\to\infty} Me^{\beta t}\|\Lambda x_k - y_0\| = 0,$$

limita fiind uniformă pentru orice $h>0$; deci, în aceleași condiții avem $\lim_{k\to\infty} A_t \Lambda x_k = A_t y_0$.

Dar $\Lambda_h x_0 = \lim_{k\to\infty} \Lambda_h x_k$ (deoarece Λ_h este un operator continuu) și deci, utilizînd (4.10), găsim

$$\Lambda_h x_0 = \frac{1}{h}\int_0^h A_s\left(\lim_{k\to\infty} \Lambda x_k\right)ds = \frac{1}{h}\int_0^h A_s y_0\, ds,$$

de unde rezultă egalitățile

$$\lim_{h\to 0} \Lambda_h x_0 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h A_s y_0\, ds = A_0 y_0 = y_0,$$

care arată că $x_0 \in \mathcal{D}(\Lambda)$ iar $\Lambda x_0 = y_0$. ⌟

Teorema 4.6. *Dacă Λ este generatorul infinitezimal al semigrupului $(A_t)_{t\geqslant 0}$ de operatori definiți pe spațiul Banach X, cu valori în X, atunci problema Cauchy*

$$\frac{du(t)}{dt} = \Lambda u(t),\ t>0,\ u(t) = u_0,\ t=0 \qquad (4.11)$$

admite o singură soluție $u(t) = A_t u_0$ pentru orice element inițial $u_0 \in \mathcal{D}(\Lambda)$.

⌜ Faptul că $u(t) = A_t u_0$ este soluție a ecuației (4.11) rezultă direct din teorema 4.4 iar deoarece $A_0 = I$ se va verifica și condiția inițială și teorema va fi demonstrată dacă reușim să arătăm că aceasta este singura soluție posibilă. Fie $u_1(t)$ o soluție a problemei Cauchy considerate, $u_1 \in X$; atunci are sens $A_{t-s}u_1(s)$ și prin derivare găsim (utilizînd teorema 4.4),

$$\frac{d}{ds}(A_{t-s}u_1(s)) = \left(\frac{d}{ds}A_{t-s}\right)u_1(s) + A_{t-s}\frac{du_1(s)}{ds} = \left(-\frac{d}{d(t-s)}A_{t-s}\right)u_1 +$$

$$+A_{t-s}\Lambda u_1(s) = -\Lambda A_{t-s}u_1(s) + A_{t-s}\Lambda u_1(s) = 0,$$

de unde, prin integrare, $s\in[0,t]$, obținem $A_{t-s}u_1(s)\Big|_{s=t}^{s=t} = 0$, deci $A_s u_1(t) - A_t u_1(0) = 0$. Cum $u_1(0) = u_0$, găsim $u_1(t) = A_t u_0$. ⌟

Teorema 4.7. *Fie $u_0 \in \mathcal{D}(\Lambda)$ și $f = f(t) \in X$ pentru $t \geqslant 0$; atunci există o singură soluție u a problemei Cauchy $u|_{t=0} = u_0$ a ecuației*

$$\frac{du}{dt} = \Lambda u + f,\quad t>0, \qquad (4.11')$$

această soluție fiind dată de relația

$$u = A_t u_0 + \int_0^t A_{t-s} f(s)ds. \qquad (4.11')$$

[Reamintim că prin soluție în acest caz se înțelege aplicația $t \to u(t)$ continuă de la $t\geqslant 0$ la $\mathcal{D}(\Lambda)$ derivabilă (forte) de la $t\geqslant 0$ la X.]

⌜ Demonstrația se bazează pe teorema 4.6, dacă arătăm că $v = \int_0^t A_{t-s} f(s)\, ds$ este o soluție a ecuației (4.11′) care pentru $t=0$ este nulă. Or, evident, $v(0) = 0$, iar

$$\frac{d}{dt}\int_0^t A_{t-s}f(s)\,ds = \int_0^t \frac{dA_{t-s}}{dt}f(s)\,ds + A_0 f(t) =$$

$$= \int_0^t \frac{d\,A_{t-s}}{d(t-s)}f(s)\,ds + f(t) = \int_0^t (\Lambda A_{t-s})f(s)\,ds + f(t) =$$

$$= \Lambda\int_0^t A_{t-s}f(s)ds + f(t). \qquad ⌟$$

Este evident că formula (4.12) este obținută cu ajutorul teoremei 4.6 prin aplicarea principiului lui Duhamel.

Din rezultatele obținute pînă acum se desprind mai multe concluzii. Prima privește teoria semigrupurilor de operatori și se poate enunța astfel : orice semigrup de operatori (continuu forte) este determinat prin generatorul său infinitezimal ; este evident că acest enunț este o parafrazare a teoremei 4.6 și constituie totodată o justificare a denumirii de generator infinitezimal dată operatorului Λ.

A doua concluzie privește teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, deoarece ecuația (4.11) sau ecuația (4.11′) conține în particular ecuațiile care fac obiectul acestui capitol : dacă operatorul Λ este un operator uniform eliptic, atunci ecuația (4.11) va coincide cu o ecuație de tip parabolic normal. Prin urmare, pentru a putea utiliza teoria semigrupurilor de operatori, la integrarea ecuațiilor de tip parabolic normal va trebui să arătăm că orice operator uniform eliptic poate fi considerat drept generatorul infinitezimal al unui semigrup de operatori. Prin urmare, schema de aplicare a teoriei semigrupurilor de operatori în teoria problemei Cauchy atașată unei ecuații de tipul

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \Lambda_{\mathbf{x}} u(t, \mathbf{x}),\ u|_{t=0} = u_0(\mathbf{x})$$

ar fi următoarea : se arată că operatorul $\Lambda_{\mathbf{x}}$ (care este un operator diferențial, ce nu conține derivate în raport cu t) poate fi extins pînă la un generator infinitezimal al unui semigrup $(A_t)_{t\geqslant 0}$ de operatori ; atunci soluția problemei Cauchy considerate va fi $u(t, \mathbf{x}) = A_t u_0(\mathbf{x})$ (pentru $t > 0$).

Pentru a decide dacă operatorul diferențial Λ din ecuația (4.11) poate fi considerat drept generatorul infinitezimal al unui semigrup (continuu forte) de operatori, se aplică următorul rezultat :

Teorema 4.8. *Dacă Λ este un operator închis al cărui domeniu de definiție $\mathscr{D}(\Lambda)$ este dens în spațiul Banach X, astfel încît operatorul $p\mathbf{I} - \Lambda$ admite un invers pentru $\xi > \beta$, unde $p = \xi + i\eta$ iar β este un număr real pozitiv și în plus $\|(p\mathbf{I} - \Lambda)\|^{-k} \leqslant \frac{M}{(\xi - \beta)^k}$, $k = 1,2,\ldots$, $\xi > \beta$, atunci Λ este generatorul infinitezimal al unui semigrup $(A_t)_{t\geqslant 0}$ unic determinat care verifică condiția (4.8) (în care constantele M și β sînt aceleași cu cele din enunțul teoremei).*

Această teoremă poartă numele de *teorema Hille-Yosida-Phililps-Miyadera-Feller* (Hille și Yosida au demonstrat teorema pentru $M < 1$).

Fie $\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathrm{D})$ un operator uniform eliptic : vom pune $L^2(D_n) = X$ iar $\mathscr{D}(\mathrm{L}) = C_0^\infty(D_n)$, coeficienții operatorului L fiind suficient de regulați, astfel încît să aibă loc inegalitatea de coercivitate

$$B(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \|\varphi\|_1^2 - k_0 \|\varphi\|_0^2$$

$k_1 > 0$, $k_0 > 0$, $\varphi \in C_0^\infty(D_n)$. Prin completare, se poate presupune $\mathscr{D}(\mathrm{L}) = H_0^m(D_n)$. Deci $\mathscr{D}(\mathrm{L})$ este dens în $L^2(D_n)$ și evident L va fi un operator închis în $L^2(D_n)$. Pentru a putea aplica teorema 4.8 va trebui să arătăm că operatorul $p\mathrm{I} + \mathrm{L}$ admite un invers pentru $\mathrm{Re}\, p = \xi > k_0$ și deci vom avea $\Lambda = -L$ [prin iterare, dacă arătăm că $\|(p\mathrm{I} - \Lambda)^{-1}\| \leqslant (\xi - \beta)^{-1}$, va rezulta $\|(p\mathrm{I} - \Lambda)^{-k}\| \leqslant (\xi - \beta)^{-k}$].

Pentru aceasta să considerăm ecuația $(\mathrm{L} + p)u = f$, $u \in \mathscr{D}(L)$, $f \in L^2(D_n)$ care se va transforma, prin integrare prin părți, în egalitatea

$$B(\varphi, u) + p(\varphi, u)_0 = (\varphi, f)_0, \tag{4.13}$$

valabilă pentru orice $\varphi \in H_0^m(D_n)$. Utilizînd inegalitatea de coercivitate vom avea (cu $p = \xi + i\eta$) :

$$B(\varphi, \varphi) + \xi(\varphi, \varphi)_0 = B(\varphi, \varphi) + \xi\|\varphi\|_0^2 \leqslant k_1\|\varphi\|_1^2 + (\xi - k_0)\|\varphi\|_0^2,$$

deci $B(\varphi, \varphi) + \xi\|\varphi\|_0^2 > 0$ pentru $\xi \geqslant k_0$. Conform cu cele cunoscute, ecuația $(\mathrm{L} + p)u = f$ va admite sigur un invers unic pentru orice $f \in L^2(D_n)$, $u = (\mathrm{L} + p)^{-1} f$. Să facem în (4.13) $\varphi = u$; găsim inegalitățile

$$k_1\|u\|_1^2 + (\xi - k_0)\|u\|_0^2 \leqslant B(u, u) + \xi(u, u)_0 = (u, f)_0 \leqslant \|u\|_0 \|f\|_0,$$

de unde rezultă inegalitatea

$$(\xi - k_0)\|u\|_0^2 \leqslant \|f\|_0 \|u\|_0,$$

deci

$$\|u\|_0 \leqslant (\xi - k_0)^{-1}\|f\|_0,$$

ceea ce este echivalent cu relația

$$\|(\mathrm{L} + p)^{-1} f\|_0 \leqslant \frac{1}{\xi - k_0}\|f\|_0,$$

deci

$$\|(L + p)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\xi - k_0}.$$

4.3. Soluția elementară a ecuației căldurii și consecințele sale

4.3.1. Rezolvarea problemei Cauchy în $\mathbb{R}^n$

În baza calculelor din 2.4.5 soluția elementară a problemei Cauchy

$$u(t, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \tag{4.14}$$

pentru ecuația căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = F \tag{4.15}$$

va fi

$$W(t, \mathbf{x}) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}\right); \tag{4.16}$$

cu ajutorul funcției W soluția ecuației (4.15) care verifică (4.14) se scrie

$$u(t, \mathbf{x}) = W(t, \mathbf{x}) *_1 f(\mathbf{x}) + W(t, \mathbf{x})\, H(t) * F(t, \mathbf{x}), \tag{4.17}$$

unde $*_1$ indică operația de convoluție în $\mathbb{R}^n$ (deci în raport cu variabilele $\mathbf{x}$), semnul $*$ se referă la convoluția în $\mathbb{R}^{n+1}$ (adică în raport cu variabilele t și $\mathbf{x}$) iar $H(t)$ este funcția unitate [deci $H(t) = 1$ dacă $t \geqslant 0$, $H(t) = 0$ dacă $t < 0$]. Explicit (4.17) se scrie

$$u(t, \mathbf{x}) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})\, e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4t}}\, d\mathbf{y} +$$

$$+ (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} F(s, \mathbf{y})\, e^{\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4(t-s)}}\, d\mathbf{y}, \tag{4.17'}$$

dacă f și F sînt funcții pentru care au sens integralele în cauză.

O funcție $u : D_{n+1} \to \mathbb{R}$ se numește *temperatură* pe D_n dacă $u \in C^\infty(D_{n+1})$ și satisface în fiecare punct al lui D_{n+1} ecuația (4.15) omogenă, adică

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = 0 \text{ în } D_{n+1} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

iar soluția elementară (4.16) se mai numește *nucleul Gauss-Weierstrass* pentru semispațiul $\Omega =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$.

Pentru acest nucleu, se pot deduce ușor următoarele proprietăți:

I. $0 < W(t, \mathbf{x}) < (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}$ *dacă* $(t, \mathbf{x}) \in \Omega$

deoarece $\exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}\right) \leqslant 1$ *dacă* $t > 0$;

II. *W este o temperatură pe Ω, deoarece se verifică ușor prin derivări că* $\frac{\partial W}{\partial t} = \Delta_n W$, *dacă* $t > 0$.

III. *Dacă* $\mathbf{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_n)$, $k_0, k_1, \ldots, k_n = 0, 1, 2, \ldots$, *atunci*

$$D^{\mathbf{k}} W(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \ldots + k_n} W(t, \mathbf{x})}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_{x_n}^{k_n}} = t^{-\frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{2}} P\, W(t, \mathbf{x}) \text{ în } \Omega,$$

unde $|\mathbf{k}| = k_0 + k_1 + \ldots + k_n$, *iar P este un polinom de grad* $k_0 + |\mathbf{k}|$ *în variabilele* $\frac{x_j}{2\sqrt{t}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *avînd coeficienții depinzînd doar de n și $\mathbf{k}$.*

IV. *Sînt valabile egalitățile*

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}\right)^p W(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \; p > -\frac{1}{2}n,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^m}{\partial t^m} W(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

$$\int_{\|\mathbf{x}\| > \varepsilon} h(\|\mathbf{x}\|^2)\, W(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\frac{\varepsilon^2}{4t}} h(4ts)\, e^{-s}\, s^{\frac{1}{2}n-1} ds, \; t > 0, \; \varepsilon > 0,$$

h fiind integrabilă pe $]0, \infty[$. Într-adevăr, ultima egalitate se justifică prin trecere la coordonate sferice în $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\|x\|\geq\varepsilon} h(\|\mathbf{x}\|^2)\, W(t,\ \mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\varepsilon}^{\infty} h(r^2)\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}\, r^{n-1}\, \mathrm{d}r \int_{S_1} \mathrm{d}\omega_n \cdot (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} =$$

$$= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\, \omega_n \int_{\varepsilon}^{\infty} h(r^2)\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}\, r^{n-1}\, \mathrm{d}r,$$

S_1 fiind sfera unitate din $\mathbb{R}^n$ cu aria egală cu $\omega_n = 2\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$. Prin schimbarea de variabilă $r = 2\sqrt{t}\, s$ se obține exact egalitatea în discuție, care pentru $h = 1$ se transformă în prima egalitate făcînd $\varepsilon \to 0$ iar pentru $h(s) = \left(\dfrac{s}{4t}\right)^p$, cu $\varepsilon \to 0$ devine a doua egalitate IV; n fine, a treia egalitate IV se obține derivînd în raport cu t prima din aceste egalități.

V. *Are loc proprietatea (de semigrup)*

$$W(t, \mathbf{x}) *_1 W(s, \mathbf{x}) = W(s + t, \mathbf{x}),\quad s > 0,\quad t > 0,\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Într-adevăr aplicînd transformarea Fourier, în raport cu $\mathbf{x}$, în baza egalității

$$\mathscr{F}_x[W(t, \mathbf{x})]\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} W(t, \mathbf{x})\, \mathrm{e}^{i\langle x,\, \xi\rangle}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{e}^{-t\|\xi\|^2},$$

avem

$$\mathscr{F}_x[W(t, \mathbf{x}) *_1 W(s, \mathbf{x})]\,(\xi) = \mathrm{e}^{-t\|\xi\|^2} \cdot \mathrm{e}^{-s\|\xi\|^2} = \mathrm{e}^{-(t+s)\|\xi\|^2} =$$

$$= \mathscr{F}_x[W(t + s, \mathbf{x})]\,(\xi).$$

Cu ajutorul acestor proprietăți ale nucleului W se poate arăta că prin (4.17′) se definește efectiv o soluție clasică a problemei Cauchy (4.14) pentru ecuația căldurii (4.15) dacă f și F sînt continue.

Teorema 4.9. *Dacă f este integrabilă în $\mathbb{R}^n$ iar integrala $K(t, \mathbf{x}) *_1 f(\mathbf{x})$ există în punctul $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$, notînd $\Omega_b =]0, b[\times \mathbb{R}^n$ avem :*

— $u_0(t, \mathbf{x}) = K(t, \mathbf{x}) *_1 f(x)$ există pentru orice $(t, \mathbf{x}) \in \Omega_{t_0}$ și u este o temperatură în Ω_{t_0}.

— Dacă f este continuă în $\mathbb{R}^n$, atunci $u(t, \mathbf{x}) \to f(\mathbf{x}_0)$ cînd $(t, \mathbf{x}) \to (0, \mathbf{x}_0)$ în Ω_{t_0}, uniform în raport cu $\mathbf{x}_0$ în orice compact din $\mathbb{R}^n$; dacă în plus f este mărginită și uniform continuă în $\mathbb{R}^n$, atunci convergența $u(t, \mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$ cînd $(t, \mathbf{x}) \to (0, \mathbf{x})$ va fi uniformă în $\mathbb{R}^n$.

⌜ Pentru $(t, \mathbf{x}) \in \Omega_{t_0}$, vom nota $\delta = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\|$, $s = \sqrt{t}$, $\tau = \sqrt{t_0}$,

$$D = \left\{\mathbf{y} \,\middle|\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\| \geq \frac{\tau\delta}{\tau - s}\right\},\quad D^* = \mathbb{R}^n \setminus D.$$

Deoarece $u_0(t_0, \mathbf{x}_0)$ există, rezultă

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(t_0, \mathbf{x}_0 - \mathbf{y})\, |f(\mathbf{y})|\, \mathrm{d}\mathbf{y} < \infty$$

iar cum pentru $\mathbf{y} \in D$ avem

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\| \geq \frac{s}{\tau}\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\|,$$

se deduce

$$\int_D W(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})\, |f(\mathbf{y})|\, \mathrm{d}\mathbf{y} \leq \left(\frac{\tau}{s}\right)^n \int_D W(t_0, \mathbf{x}_0 - \mathbf{y})\, |f(\mathbf{y})|\, \mathrm{d}\mathbf{y} <$$

$$< \left(\frac{\tau}{s}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} W(t_0, \mathbf{x}_0 - \mathbf{y})\, |f(\mathbf{y})|\, \mathrm{d}\mathbf{y} < \infty;$$

apoi, din proprietatea I, $W(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}$, rezultă

$$W(t_0, \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) \geq (4\pi t_0)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\,\delta^2(\tau - s)^{-2}\right]$$

pentru orice $y \in D^*$, ceea ce conduce la inegalitățile

$$\int_{D^*} W(t, x - y)\ |f(y)|\ dy \leqslant (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{D^*} |f(y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\tau}{s}\right)^n \exp\left[\frac{1}{4}\delta^2(\beta - \tau)^2\right] \int_{D^*} W(t_0, x_0 - y)\ |f(y)|\, dy$$

și deci $u(t, x)$ există.

Utilizînd teoremele de derivare sub semnul integral, deoarece nucleul W este o temperatură și deci în Ω_{t_0}, u va fi de asemenea o temperatură.

Fie f continuă și fie $\varepsilon > 0$, $K > 0$; se poate găsi $\eta > 0$ astfel încît $|f(z) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ cînd $\|z\| \leqslant K$ și $\|z - x_0\| < 2\eta$. Fie $M = \max_{\|y\| \leqslant 3K+3\eta} |f(y)|$ și fie $\|z\| \leqslant K$, $\|x - z\| \leqslant \eta$; din proprietățile IV ale lui K, putem scrie

$$u(t, x) - f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} W(t, y)\ [f(x - y) - f(z)]\, dy =$$

$$= \int_{\|y\| \leqslant \eta} W(t, y)\ [f(x - y) - f(z)]\, dy + f(z) \int_{\|y\| > \eta} W(t, y)\, dy +$$

$$+ \int_{\|y\| > \eta} W(t, y)\, f(x - y)\, dy.$$

și deci

$$|u(t, x) - f(z)| \leqslant \varepsilon + M \int_{\|y\| > \eta} W(t, y)\, dy + \int_{\|y\| > \eta} W(t, y)\ |f(x - y)|\, dy.$$

Dacă $\|y\| \leqslant 2K + 2\eta$, rezultă $\|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z\| + \|y\| \leqslant 3K + 3\eta$, deci $\int_{\|y\| > \eta} W(t, y)\ |f(x - y)|\, dy \leqslant M \int_{\|y\| > \eta} W(t, y)\, dy +$

$$+ \int_{\|y\| > 2K+2\eta} W(t, y)\ |f(x - y)|\, dy;$$

apoi

$$\int_{\|y\| > 2K+2\eta} W(t, y)\ |f(x - y)|\, dy = \int_{\|x-y\| > 2K+2\eta} W(t, x - y)\ |f(y)|\, dy.$$

Cum dacă $\|x - y\| > 2K + 2$ avem $\|x\| \leqslant \|z\| + \|x - z\| \leqslant K + \frac{1}{2}\|x - y\|$, se deduce

$$\|y\| \geqslant \|x - y\| - \|x\| > \frac{1}{2}\|x - y\| > K + \eta > \eta,$$

$$\|y\| \leqslant \|x - y\| + \|x\| < \frac{3}{2}\|x - y\|,$$

rezultă

$$W(t, x - y) \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n W\left(\frac{9}{4}t, y\right);$$

apoi

$$\int_{\|x-y\| > 2K+2\eta} W(t, x-y)\ |f(y)|\, dy \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_{\|y\| > \eta} W\left(\frac{9}{4}t,\ y\right) |f(y)|\, dy,$$

adică

$$|u(t, x) - f(z)| \leqslant \varepsilon + 2M \int_{\|y\| > \eta} W(t, y)\, dy + \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_{\|y\| > \eta} W\left(\frac{9}{4}t, y\right) |f(y)|\, dy$$

dacă $\|z\| \leqslant K$, $\|x - z\| \leqslant \eta$, $0 < t < \frac{4}{9}t_0$.

Cum, în ipotezele $\|\mathbf{y}\| \geqslant \eta$, $0 < p < \frac{1}{2}t_0$, avem

$$W(p, \mathbf{y})/W\left(\frac{1}{2}t_0, \mathbf{y}\right) = \left(\frac{t_0}{2p}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\|y\|^2\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{t_0}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{t_0}{2p}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{9}\|\eta\|^2\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{t_0}\right)\right],$$

ceea ce înseamnă că $\dfrac{W(p, \mathbf{y})}{W\left(\frac{1}{2}t_0\, \mathbf{y}\right)} \to 0$ cînd $p \to 0$, uniform pentru $\|\mathbf{y}\| \geqslant \eta$; rezultă că dacă $\|\mathbf{y}\| \geqslant \eta$, atunci $W(p, \mathbf{y}) \to 0$ cînd $p \downarrow 0$ și este majorat printr-un factor proporțional cu $W\left(\frac{1}{2}t_0, \mathbf{y}\right)$. În baza unui rezultat cunoscut din teoria integralei se deduce că

$$\lim_{t \to 0} \int\limits_{\|\mathbf{y}\| > \eta} W(t, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \lim_{t \downarrow 0} \int\limits_{\|\mathbf{y}\| > \eta} W\left(\frac{9}{4}t, \mathbf{y}\right) |f(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} = 0;$$

cum ambele integrale sînt independente de $\mathbf{z}$, rezultă că $u(t, \mathbf{x}) \to f(\mathbf{z})$ cînd $(t, \mathbf{x}) \to (0, \mathbf{z})$, uniform pentru $\|\mathbf{z}\| \leqslant K$. La fel se tratează și cazul în care f este mărginită și uniform continuă în $\mathbb{R}^n$. ⌟

Se verifică imediat, prin calcule similare cu cele anterioare, că dacă $f(\mathbf{x}) = e^{a\|\mathbf{x}\|^2}$, $a > 0$, integrala Gauss-Weiestrass relativă la f există în banda $\left]0, \frac{1}{4a}\right[\times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ și că dacă

$$|f(\mathbf{x})| \leqslant b\, e^{a\|\mathbf{x}\|^{2q}},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ 0 < q < 1,$$

dacă $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, atunci aceeași integrală există în Ω.

4.3.2. Teorema de unicitate a soluției problemei Cauchy

La punctul precedent s-a determinat funcția $u(t, \mathbf{x})$, continuă pentru $t \geqslant 0$ și $x \in \mathbb{R}^n$ care verifică ecuația căldurii

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = F(t, \mathbf{x})\ t > 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{4.15}$$

și condiția inițială

$$u(t, \mathbf{x})|_{t=0} = f(\mathbf{x}). \tag{4.14}$$

Teorema 4.10. *Problema Cauchy* (4.14) *pentru ecuația căldurii* (4.15) *are o singură soluție în mulțimea funcțiilor mărginite* (adică a funcțiilor u care verifică $|u(t, \mathbf{x})| \leqslant M$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$).

⌜ Fie u_1 și u_2 două soluții ale problemei în studiu; diferența lor $u = u_1 - u_2$ va verifica ecuația omogenă

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = 0 \tag{4.15'}$$

și condiția inițială

$$u(t, \mathbf{x})|_{t=0} = 0 \tag{4.14'}$$

iar în plus $|u| \leqslant |u_1| + |u_2| \leqslant 2M$. Să considerăm domeniul mărginit $\|\mathbf{x}\| \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$ din $\mathbb{R}^{n+1}$ și funcția

$$v(t, \mathbf{x}) = \frac{4Mn}{L^2}\left(\frac{1}{2n}\|\mathbf{x}\|^2 + a^2 t\right)$$

care verifică ecuația (4.15') iar

$$v(0, \mathbf{x}) = \frac{2M}{L^2}\|\mathbf{x}\|^2 \geqslant u(0, \mathbf{x}) = 0$$

$$v(t, \mathbf{x})|_{\|\mathbf{x}\| = L} = \frac{4Mn}{L^2}\left(\frac{1}{2n}L^2 + a^2 t\right) \geqslant 2M > u(t, \mathbf{x})|_{\|\mathbf{x}\| = L};$$

aplicînd rezultatele din 4.1, în domeniul $G = [0, T] \times B_L(0)$ [$B_r(\mathbf{x}_0)$ fiind sfera de rază r centrată în $\mathbf{x}_0$] va avea loc inegalitatea

$$|u(t, \mathbf{x})| \leqslant v(t, \mathbf{x}).$$

Dacă $t_0 > 0$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, pentru L și T suficient de mari rezultă $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ și deci pentru L suficient de mare avem

$$|u(t_0, \mathbf{x}_0)| \leqslant v(t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{4Mn}{L^2}\left(\frac{1}{2n}\|\mathbf{x}_0\|^2 + a^2 t_0\right)$$

Trecînd la limită, pentru $L \to \infty$, cum u nu depinde de φ, se deduce $u(t_0, \mathbf{x}_0) = 0$ și deoarece $(t_0, \mathbf{x}_0)$ este arbitrar din Ω, se deduce $u_1(t, \mathbf{x}) = u_2(t, \mathbf{x})$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. ⌟

În mod analog se obține și teorema de stabilitate a soluției problemei Cauchy.

4.3.3. Interpretări fizice

Vom considera $n = 1$ (deci este cazul propagării căldurii într-o bară) iar soluția problemei Cauchy $u(t, x)|_{t=0} = f(x)$ pentru ecuația $u_t - u_{xx} = 0$ se va scrie

$$u(t, x) = W(t, x) *_1 f(x).$$

Pentru a obține o interpretare fizică pentru nucleul Gauss-Weierstrass W, să presupunem că în punctul x_0 al barei se plasează la momentul inițial o sursă calorică punctuală, instantanee, avînd intensitatea egală cu unitatea; matematic această situație se scrie $f(x) = \delta(x - x_0)$ și deci temperatura în bară la momentul t și în secțiunea x va fi

$$u(t, x) = W(t, x) *_1 \delta(x - x_0) = W(t, x - x_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}}.$$

Prin urmare, soluția elementară $\mathscr{E}_t(x - x_0) = W(t, x - x_0)$ nu reprezintă altceva decît legea de propagare a căldurii într-o bară omogenă de lungime infinită, izolată termic pe suprafața laterală, presupunînd că la momentul inițial temperatura în bară este peste tot nulă, exceptînd punctul $x = x_0$ în care este plasată sursa calorică amintită anterior.

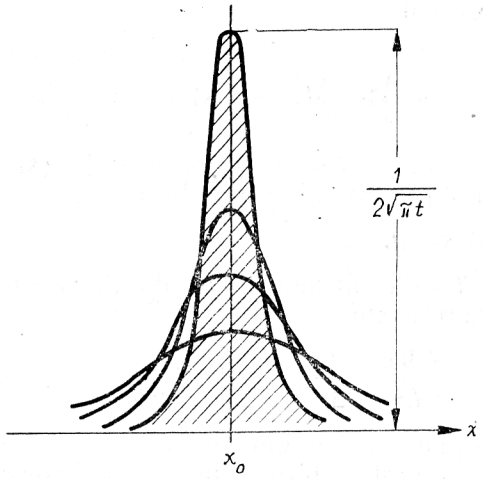

Fig. 4.2

În fig. 4.2 sînt trasate graficele funcției $\mathscr{E}_t(x - t)$ pentru patru valori diferite ale lui t; graficele vor fi simetrice față de dreapta $x = x_0$ [din cauza apariției termenului $(x - x_0)^2$ în $\mathscr{E}_t(x)$], atingîndu-se valoarea maximă $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}$, pentru $x = x_0$, ceea ce este evident din punct de vedere fizic; temperatura maximă în bară se găsește în punctul în care s-a plasat sursa calorică. Oricare ar fi graficul considerat, aria domeniului cuprins între un grafic al funcției $y = \mathscr{E}_t(x - x_0)$ și axa Ox este egală cu unitatea (proprietatea IV din 4.3.1) proprietatea care poate fi interpretată fizic astfel: energia

calorică totală din bară la momentul t, definită prin $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x)\,dx$, nu se modifică, fiind permanent egală cu intensitatea calorică inițială.

Să cercetăm ce se întîmplă în secțiune de abscisă $x \neq x_0$ a barei (deci x este fixat). Vom scrie

$$v(t) = \mathscr{E}_t(x - x_0) = W(t, x - x_0)$$

și evident $v(t)|_{t=0} = 0$, deoarece sursa de căldură nu este plasată în secțiunea de abscisă x iar prin aplicarea regulii lui l'Hospital găsim

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}} = 0.$$

Deoarece

$$v'(t) = \frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2t}} \left[\frac{(x - x_0)^2}{2t} - 1 \right],$$

rezultă că temperatura maximă din secțiunea de abscisă x se obține la momentul $t_1 = \frac{(x - x_0)^2}{2}$, valoarea maximă fiind

$$v_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \cdot \frac{1}{|x - x_0|};$$

așadar temperatura în secțiunea $x \neq x_0$ din bară crește de la zero pînă la valoarea v_{max} și apoi descrește asimptotic către zero. Această valoare maximă este invers proporțională cu distanța pînă la sursa calorică iar timpul în care se obține temperatura maximă este direct proporțional cu pătratul acestei distanțe.

În ceea ce privește interpretarea fizică a soluției

$$u(t,x) = W(t, x) *_1 f(x),$$

cum temperatura inițială în secțiunea $x = x_0$ este $f(x_0)$, se poate considera temperatura inițială a barei ca fiind mulțimea temperaturilor punctuale $\{f(x_0)\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, și atunci u se obține prin suprapunerea tuturor efectelor calorice plasate în punctele barei la momentul inițial

$$\left[\text{evident această suprapunere conduce la } \int_{-\infty}^{+\infty} W(t, x - y) f(y)\,dy\right].$$

Rezultă deci că formulele în cauză exprimă corespunzător fenomenul de propagare a căldurii, rezultatele concordînd cu cele deduse prin experiență; apare totuși și o inadvertență fizică: deoarece pentru orice $x \neq x_0$ și $t > 0$ oricît de mic avem $\mathscr{E}_t(x - x_0) > 0$, rezultă că oricît de departe ar fi secțiunea de abscisă x față de secțiunea $x = x_0$, temperatura în această secțiune este diferită de zero (ca și cum ar fi avut loc o propagare instantanee a căldurii din $x = x_0$ pînă în secțiunea $x \in \mathbb{R}$). Explicația acestui fenomen se obține ușor dacă avem în vedere faptul că ecuația utilizată este o primă aproximare a ecuației reale.

Exerciții

1°. Să se găsească soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

care verifică condiția inițială $u(t, x)|_{t=0} = u_0(x) = \begin{cases} A, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x \notin [x_1, x_2], \end{cases}$

A fiind o constantă.

R. Utilizînd soluția $u_0(t, x) = \mathscr{E}_t(x) *_1 u_0(x)$, se obține

$$u(t, x) = \frac{A}{\sqrt{4a^2 t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}\, ds,$$

care, prin utilizarea funcției erorilor, $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt$ efectuînd în soluția găsită schimbarea de variabilă $\frac{x - s}{2a\sqrt{t}} = y$, $ds = -2a\sqrt{t}\, dy$, se scrie

$$u(t, x) = -\frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{y^2}\, dy = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2}\, dy - \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy =$$

$$= \frac{A}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x - x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

2°. Să se arate că soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

care verifică

$$u(t, x)|_{t=0} = \begin{cases} A\left(1 - \frac{x}{l}\right), & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant l, \\ A\left(1 + \frac{x}{l}\right), & \text{dacă } -l \leqslant x \leqslant 0, \\ 0, & \text{dacă } |x| > l, \end{cases}$$

se poate scrie sub forma

$$u(t, x) = \frac{A}{2}\left\{\left(1 + \frac{x}{l}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x + l}{2a\sqrt{t}}\right) - 2\frac{x}{l}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x - l}{2a\sqrt{t}}\right) + A\frac{a}{l}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left\{e^{-\frac{(x+l)^2}{4a^2 t}} - 2e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2 t}}\right\}.\right.$$

3°. Dacă $u_0(x) = A e^{-b^2 x^2}$, A și b fiind constante pozitive, atunci soluția ecuației $\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ care verifică condiția $u(t, x)|_{t=0} = u_0(x)$ va fi

$$u(t, x) = \frac{A}{\sqrt{1 + 4a^2 b^2 t}}\, e^{-\frac{b^2 x^2}{1 + 4a^2 b^2 t}}.$$

R. Integrala care apare în soluția corespunzătoare se poate calcula utilizînd transformarea puterii în pătrat perfect.

4°. Să se arate că dacă $u(t, x)|_{t=0} = A e^{-b^2|x|}$, atunci soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

se va scrie sub forma

$$u(t, x) = \frac{A}{2}\, e^{a^2 b^4 t}\left\{e^{-b^2 x}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - ab^2\sqrt{t}\right)\right] + e^{b^2 x}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ab^2\sqrt{t}\right)\right]\right\}.$$

5°. Să se arate că în formula finală contribuția factorului perturbator F poate fi obținută și prin intermediul principiului lui Duhamel.

R. Scriind

$$u_p(t, x) = \int_0^t V(t - z, z, x)\, dz,$$

u_p va verifica ecuația

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x)$$

dacă $V = V(t, z, x)$ verifică ecuația omogenă $\frac{1}{a^2}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$ pentru orice z precum și condiția inițială $V|_{t=0} = a^2 F(z, x)$; deci

$$V(t, z, x) = \frac{a^2}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z, y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\, dy.$$

și scriind $t - z$ în loc de t, prin înlocuire se va obține expresia cerută

$$u_p(t, x) = \frac{a}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{t-z}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z, y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-z)}}\, dy.$$

6°. Utilizînd exercițiul 5, să se arate că soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{a^2} x^2 t - \frac{1}{a^2} x - 2t^2$$

care verifică $u|_{t=0} = 0$ se scrie $u(t, x) = x^2 t^2 - xt$.

7°. Să se arate că soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{b}{a^2} x\, e^{bxt} - b^2 t^2\, e^{bxt},$$

care este astfel încît $u|_{t=0} = 1$, va fi $u(t, x) = e^{bxt}$

8°. Să se arate că soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-b^2 x^2},$$

care se anulează pentru $t = 0$, se poate scrie sub forma

$$u(t, x) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{b^2 x^2}{a^2 b^2 (t-z)+1}} \frac{dz}{\sqrt{4a^2 b^2 (t-z)+1}}.$$

9°. Dacă $u(t, x)|_{t=0} = e^{-\frac{b^2}{x^2}}$, $b > 0$ (distribuție inițială de temperaturi discontinuă în origine), să se studieze $u(t, x)$ pentru $x = 0$, dacă u verifică ecuația

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

R. Deoarece

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t} - \frac{b^2}{y^2}}\, dy,$$

avem

$$u(t, 0) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4a^2 t} - \frac{b^2}{y^2}}\, dy$$

și efectuînd schimbarea de variabilă $\frac{y}{2a\sqrt{t}} \to y$, se obține

$$u(t, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}}\, dy, \qquad c^2 = \frac{b^2}{4a^2 t}.$$

Integrala $I(c) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}}\, dy$ se calculează prin derivare: cu schimbarea de variabilă $y = c/z$ se va obține ecuația $I'(c) = -2I$, deci $I(c) = Ae^{-2c}$ și deoarece $I(0) = 1$, rezultă în definitiv $I(c) = e^{-2c}$; așadar

$$u(t, 0) = e^{-\frac{b}{2\sqrt{t}}}.$$

10°. Se consideră ecuația

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu = F(t, x),$$

b fiind o constantă. Să se arate că soluția problemei Cauchy $u|_{t=0} = u_0(x)$ se poate scrie sub forma

$$u(t, x) = \frac{e^{-bt}}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} + \frac{a\, e^{-bt}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)} + bs} F(s, y)\, dy.$$

R. Făcînd schimbarea de variabilă $u(t, x) = e^{-bt} v(t, x)$, va rezulta că v verifică ecuația

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(t, x)\, e^{bt}$$

și condiția inițială $v|_{t=0} = u_0(x)$.

CAPITOLUL 5

Ecuații de tip hiperbolic

5.1. Soluții slabe pentru ecuații de tip hiperbolic

5.1.1. Introducere

Să considerăm ecuația liniară cu derivate parțiale de ordin m

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n), \tag{5.1}$$

în care a_α [coeficienții ecuației (5.1)] sînt funcții reale convenabil definite într-un domeniu $D_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (D_{n+1} poate să coincidă cu $\mathbb{R}^{n+1}$). Dacă $x_0 = t$, vom nota prin $L_0 u$ partea principală a ecuației (5.1), adică

$$L_0 u = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u; \tag{5.2}$$

în ipoteza că a_α sînt constanți, vom putea scrie

$$L_0 u = Q\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) u,$$

unde $Q(\lambda, \boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, este o formă de grad m cu coeficienți constanți (reali).

Dacă pentru orice $\boldsymbol{\eta}$ real ecuația de grad m în λ admite numai rădăcini reale iar $Q(1,0) \neq 0$, atunci ecuația (5.1) cu coeficienți constanți se va numi de *tip hiperbolic* relativ la varietatea $t = 0$.

Aceeași ecuație se va numi *strict hiperbolică* relativ la hiper-planul $t = 0$ dacă pentru orice $\boldsymbol{\eta} \neq 0$ toate rădăcinile ecuației $Q(\lambda, \boldsymbol{\eta}) = 0$ sînt reale și distincte [menținîndu-se ipoteza $Q(1, 0) \neq 0$].

În cazul coeficienților depinzînd de $\mathbf{x} \in D_{n+1}$, se poate considera partea principală (5.2) în care coeficienții a_α, $|\alpha| = m$, sînt calculați într-un punct $\mathbf{x}' \in D_{n+1}$, arbitrar și să se definească hiperbolicitatea ecuației (5.1) în punctul considerat.

O altă definiție este următoarea: ecuația (5.1) în care partea principală (5.2) este cu coeficienți constanți se spune că este *hiperbolică în sensul lui Garding*, dacă polinomul omogen $Q = Q(x_0, x_1, \ldots, \ldots, x_n)$ de gradul m este un polinom hiperbolic în raport cu $\mathbf{a}$, adică pentru orice $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ și orice $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ (a_j și x_j fiind numere reale), ecuația $Q(sa_0 + x_0, sa_1 + x_1, \ldots, sa_n + x_n) = 0$ are exact m rădăcini reale. De exemplu, polinoamele

$$P_1(\mathbf{x}) = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2, \quad P_2(\mathbf{x}) = x_0 x_1 \ldots x_n$$

sînt hiperbolice în raport cu $\mathbf{a}$ dacă $P_1(\mathbf{a}) > 0$ și $P_2(\mathbf{a}) \neq 0$ respectiv.

Tipul reprezentativ pentru ecuațiile de tip hiperbolic este ecuația de tip hiperbolic normal de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + b_0(t, \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} b_j(t, \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} +$$

$$+ c(t, \mathbf{x})\, u = f(t, \mathbf{x}), \quad a_{jk} = a_{kj}, \tag{5.3}$$

în care, pentru orice $t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in D_n$ avem îndeplinită condiția

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t, \mathbf{x}) \xi_j \xi_k \geqslant c_0 \|\xi\|^2, \quad c_0 > 0. \tag{5.4}$$

Evident, ecuația (5.3), în condiția (5.4), generalizează ecuația undelor din spațiul $\mathbb{R}^n$. Un fapt important este acela că ecuația (5.3) se poate încadra într-un tip special de sisteme de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi de forma

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial v}{\partial x_j} + \mathbf{B}\, v = \mathbf{F}, \quad x_0 = t, \tag{5.5}$$

unde $\mathbf{A}_j$ și $\mathbf{B}$ sînt $n+2$ matrice pătrate de ordin $n+2$, $\mathbf{v}$ și $\mathbf{F}$ sînt matrice coloane cu $n+2$ linii iar $\mathbf{A}_j$ sînt matrice simetrice. În aceste condiții, un sistem de tipul (5.5) se va numi *sistem simetric* de ecuații. În plus, sistemul (5.5) se va numi *sistem simetric hiperbolic* dacă matricea $\mathbf{A}_0$ este pozitiv definită.

Să arătăm că ecuația (5.3), în condiția (5.4) se poate aduce la forma unui sistem (5.5) cu $\mathbf{A}_0$ pozitiv definit. Pentru aceasta să notăm

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} = u_j\,, \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

iar dacă $u \in C^2$ vom avea $\dfrac{\partial u_0}{\partial x_j} = \dfrac{\partial u_j}{\partial t}$ și prin înlocuire în ecuația (5.3) vom obține sistemul de ecuații de ordinul întîi

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = u_0 \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial u_j}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_j} = 0 \\ &\frac{\partial u_0}{\partial t} - \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \sum_{j=0}^{n} b_j u_j + cu = f \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Să introducem următoarele matrice:

$$\mathbf{A} = [a_{jk}],\ \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_{2,n} \\ \mathbf{O}_{n,2} & \mathbf{A} \end{bmatrix},\ \mathbf{A}^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ a_{j1} & \ldots & a_{jn} \end{bmatrix},\ \mathbf{A}^{(j)}_{*} = \begin{bmatrix} 0 & a_{j1} \\ \vdots & \\ 0 & a_{jn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2,2} & \mathbf{A}^{(j)} \\ \mathbf{A}^{(j)} & \mathbf{O}_{n,n} \end{bmatrix},\ \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_n \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{O}_{n,n+2} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{O}_{p,q}$ fiind matricea nulă cu p linii și q coloane. Se verifică imediat că sistemul (5.6) se va transforma în sistemul (5.5) în care matricea $\mathbf{A}_0$ este evident pozitiv definită, în baza condiției (5.4), iar $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j^t$. Dacă ecuației (5.3) i se atașează condițiile Cauchy

$$u\Big|_{t=0} = g(\mathbf{x}),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = h(\mathbf{x}),\ h, \frac{\partial g}{\partial x_j} \in C^0, \tag{5.8}$$

atunci, deoarece $u_0 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ iar $u_j = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, vom obține din a doua condiție egalitatea $u_0\Big|_{t=0} = h$, iar din prima condiție $u_j\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial g}{\partial x_j}$, ceea ce înseamnă că sistemul (5.5) i se va atașa condiția inițială

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} g \\ h \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Reciproc, fie $\mathbf{v}$ o soluție a sistemului (5,5), în care matricele sînt definite prin relațiile (5.7), care verifică condiția inițială (5.9). Atunci presupunînd u, u_0, $u_1,\ldots,u_n$ de clasă C^2, ținînd seama de (5.9), vom avea $u_j(0,\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u(0,\mathbf{x})}{\partial x_j}$ și deoarece, în acest sens, sistemul (5.5) se va scrie sub forma (5.6), din această formă vom deduce sistemul liniar

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right) = 0,$$

care, deoarece $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ este o matrice nesingulară, admite numai soluția banală $\dfrac{\partial u_j}{\partial t} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x_j} = 0$, adică $\dfrac{\partial u_j}{\partial t} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t}$. Deci vom

avea $\frac{\partial}{\partial t}\left(u_j - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$, adică $u_j - \frac{\partial u}{\partial x_j} = \varphi_j(\mathbf{x})$, funcțiile φ_j fiind nule, din cauza condiției inițiale nule, deduse anterior, pe care o verifică funcțiile $u_j - \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Prin urmare, avem $u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, ceea ce face ca prin înlocuirile corespunzătoare în ultima ecuație a sistemului (5.6) să se obțină chiar ecuația (5.3), condițiile inițiale (5.8) verificîndu-se automat, după cum va rezulta din definiția vectorilor $\mathbf{v}$ și $\mathbf{v}_0$.

Punînd în sistemul (5.5) $\mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{w}$, λ fiind un parametru real, din sistemul (5.5) se va deduce sistemul echivalent

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} + (\mathbf{B} + \lambda \mathbf{A}_0)\mathbf{w} = \mathbf{F}\, e^{-\lambda t} \tag{5.10}$$

care diferă de sistemul inițial (5.5) prin înlocuirea matricei $\mathbf{B}$ prin matricea $\mathbf{B} + \lambda \mathbf{A}_0$ și înlocuirea vectorului $\mathbf{F}$ prin vectorul $\mathbf{F}e^{-\lambda t}$.

Ținînd seama că matricea $\mathbf{A}_0$ este nesingulară ($\mathbf{A}$ fiind nesingulară), prin înmulțire la stînga cu $\mathbf{A}_0^{-1}$, din sistemul (5.5) se va obține sistemul mai simplu

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \bar{\mathbf{A}}_j(t, \mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} + \bar{\mathbf{B}}(t, \mathbf{x})\, \mathbf{v} = \bar{\mathbf{F}}(t, \mathbf{x}), \tag{5.5'}$$

$$\bar{\mathbf{A}}_j = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_j, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{F}.$$

În viitor vom scrie $\mathbf{u}$ în loc de $\mathbf{v}$ și deci în loc de a considera ecuații de forma (5.3) vom putea considera sisteme hiperbolice simetrice de ordinul întîi, al căror studiu este uneori mult mai simplu decît studiul ecuației (5.3) sau al unor ecuații de tip hiperbolic de ordin $\geqslant 2$; aproape toate ecuațiile liniare ale fizicii matematice de tip hiperbolic și de un ordin oarecare se pot reduce la sisteme de forma (5.5).

După cum este binecunoscut, problema Cauchy (5.8) [respectiv problema Cauchy (5.9)] este o problemă Cauchy restrînsă, problema Cauchy generală obținîndu-se prin înlocuirea hipersuprafeței $t = 0$ printr-o hipersuprafață S_n de dimensiune n, de ecuație carteziană $G(t, \mathbf{x}) = G(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Hipersuprafața S_n nu poate fi arbitrară în cazul în care dorim să rezolvăm problema Cauchy $\mathbf{v}|_{S_n} = \mathbf{v}_0$ pentru sistemul (5.5).

Rezolvarea acestei probleme Cauchy revine la următoarele: cunoscîndu-se valorile vectorului $\mathbf{v}$ pe hipersuprafața S_n, să se determine, în vecinătatea acestei hipersuprafețe vectorul $\mathbf{v}$ care verifică sistemul (5.5); cu alte cuvinte, va trebui să prelungim convenabil în exteriorul lui S_n valorile inițiale $\mathbf{v}_0$ în așa fel încît să obținem o soluție a sistemului (5.5). Această prelungire însă nu este totdeauna posibilă; după considerațiile din 2.1, hipersuprafețele $G = G(t, \mathbf{x}) = c$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care verifică ecuația

$$\det\left[\mathbf{A}_0 \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial G}{\partial x_j}\right] = 0 \tag{5.11}$$

vor fi *hipersuprafețele caracteristice* ale sistemului (5.5) (vezi și 1.2) și dacă hipersuprafața S_n este hipersuprafață caracteristică a sistemului (5.5), problema Cauchy (5.9) nu poate fi, în general, rezolvată. De aceea, se vor presupune hipersuprafețele care poartă datele inițiale necaracteristice, adică în fiecare punct al acesteia avem verificată relația (5.11).

Dacă o hipersuprafață S_n de ecuația $G(t, \mathbf{x}) = 0$ este astfel încît în fiecare punct al ei matricea $\mathbf{A}$ definită prin egalitatea

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial G}{\partial x_j}$$

este pozitiv definită, atunci această hipersuprafață se numește de *tip spațial* pentru sistemul (5.5). În baza calculelor anterioare fără a micșora generalitatea, vom presupune că hiperplanul $x_0 = t = \text{const}$ este o hipersuprafață de tip spațial pentru sistemul (5.5), ceea ce de fapt revine la ipoteza că matricea $\mathbf{A}_0$ este pozitiv definită.

5.1.2. Integrala energiei și unicitatea soluției problemei Cauchy

Vom considera din nou sistemul (5.5), punînd $\mathbf{u}$ în loc de $\mathbf{v}$, și vom folosi notația

$$\mathbf{Au} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \mathbf{Bu}; \tag{5.12}$$

vom calcula produsul scalar $(\mathbf{Au}, \mathbf{u})$, în ipoteza că dacă $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = (u_{11},\ldots,u_{1p})$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) = (u_{21},\ldots,u_{2p})$, atunci produsul scalar $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ este dat de

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_{D_n} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_p \mathrm{d}\mathbf{x}, (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_p = u_{11}u_{21} + \ldots + u_{1p}\, u_{2p},$$

D_n fiind domeniul în care sînt definite și sînt suficient de regulate componentele vectorilor $\mathbf{u}_1$ și $\mathbf{u}_2$.

În baza simetriei matricelor $\mathbf{A}_j$, considerînd că în domeniul D_n sînt permise toate operațiile care vor fi efectuate, vom putea scrie egalitățile

$$(\mathbf{Au}, \mathbf{u}) = \int_{D_n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \mathbf{Bu}, \mathbf{u} \right)_m \mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \int_{D_n} \left(\mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \mathbf{u} \right)_m \mathrm{d}\mathbf{x} +$$

$$+ \int_{D_n} (\mathbf{Bu}, \mathbf{u})_m \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \int_{D_n} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \mathbf{A}_j \mathbf{u} \right)_m \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{D_n} (\mathbf{Bu}, \mathbf{u})_m \, \mathrm{d}\mathbf{x} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{D_n} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{u}, \mathrm{A}_j \mathbf{u})_m \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{n} \int_{D_n} \left(\mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{A}_j \mathbf{u}) \right) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{D_n} (\mathbf{Bu}, \mathbf{u})_m \, \mathrm{d}\mathbf{x} =$$

$$= \int_{\partial D_n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \nu_j \mathbf{u}, \mathbf{u} \right) \mathrm{d}\sigma - \sum_{j=1}^{n} \int_{D_n} \left(\mathbf{u}, \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right)_m \mathrm{d}\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{n} \int_{D_n} \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j} \mathbf{u} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} +$$

$$+ \int_{D_n} (\mathbf{Bu}, \mathbf{u})_m \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

S-a utilizat evident formula flux-divergență ($\nu_1,\ldots,\nu_n$) fiind ca de obicei componentele versorului normalei exterioare la ∂D_n; utilizînd și simetria matricelor $\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j}$, vom avea egalitatea fundamentală

$$(\mathbf{Au}, \mathbf{u}) = -\int_{D_n} \left(\mathbf{u}, \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right)_m \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{D_n} \left(\left[\mathbf{B} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j} \right] \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)_m \mathrm{d}\mathbf{x} +$$

$$+ \int_{\partial D_n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \nu_j \mu, \mathbf{u} \right)_m \mathrm{d}\sigma. \qquad (5.23)$$

Vom nota $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j}$ și deci avem egalitatea

$$(\mathbf{Au}, \mathbf{u}) = -\int_{D_n} \left(\mathbf{u}, \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right)_m \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{D_n} (\mathbf{B}_1 \mathbf{u}, \mathbf{u})_m \, \mathrm{d}\mathbf{x} +$$

$$+ \int_{\partial D_n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \nu_j \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)_m \mathrm{d}\sigma \qquad (5.13')$$

[aici m este un număr natural oarecare; de exemplu, în cazul sistemului (5.6) avem $m = n + 2$].

Se poate face ipoteza $(\mathbf{B}_1\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$; într-adevăr, ținînd seama de sistemul (5.10), în locul matricei $\mathbf{B}$ vom putea totdeauna considera metrica $\mathbf{B} + \mathbf{A}_0$ și deoarece $\mathbf{A}_0$ este o matrice pozitiv definită, pentru λ real, pozitiv, suficient de mare, obținem inegalitatea dorită.

Notînd

$$\mathbf{Lu} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \mathbf{Bu}, \quad x_0 = t, \qquad (5.14)$$

repetînd calculele anterioare, presupunînd în plus funcțiile în cauză reale, găsim ușor identitatea integrală

$$2(\mathbf{Lu}, \mathbf{u}) = \int_{\partial D_{n+1}} \left(\mathbf{u}, \left[\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \, \nu_j \right] \mathbf{u} \right)_m \mathrm{d}\sigma + \int_{D_{n+1}} (\mathbf{B}_1 \mathbf{u}, \mathbf{u})_m \, \mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad (5.15)$$

Să presupunem acum că datele Cauchy pentru sistemul $\mathbf{Lu} = \mathbf{F}$ se dau pe hipersuprafața S_0 de tip spațial și fie S_1 o altă hipersuprafață de tip spațial care este astfel încît $S_0 \cup S_1$ formează frontiera unui domeniu lenticular din $\mathbb{R}^{n+1} = \{t, \mathbf{x}\}$.

Teorema 5.1. *Dacă $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ este o soluție (ordinară) a sistemului omogen $\mathbf{Lu} = 0$ iar $\mathbf{u}$ este nul pe S_0, atunci u este nul pe orice altă hipersuprafață de tip spațial S_1 astfel încît S_0 și S_1 să aibă o frontieră comună.*

⌜ În formula (5.15) se presupune D_{n+1} astfel încît $\partial D_{n+1} = S_0 \cup S_1$; dacă $\mathbf{Lu} = 0$ iar $\mathbf{u}|_{S_0} = 0$ din această formulă se obține

$$\int_{S_1} \left(\mathbf{u}, \left[\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \, \nu_j \right] \mathbf{u} \right)_m \mathrm{d}\sigma + \int_{D_{n+1}} (\mathbf{B}_1 \mathbf{u}, \mathbf{u})_m \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0, \qquad (5.16)$$

care, din cauză că $(\mathbf{B}_1 \mathbf{u}, \mathbf{u})_m > 0$, arată că neapărat avem

$$\int_{S_1} \left(\mathbf{u}, \left[\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \nu_j \right] \mathbf{u} \right)_m d\sigma \leqslant 0.$$

Dar S_1 fiind o hipersuprafață de tip spațial, conform cu definiția unor astfel de hipersuprafețe, avem $\left(\mathbf{u}, \left[\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] \mathbf{u} \right)_m > 0$ și cum ν_j sînt proporționale cu $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, inegalitatea anterioară este posibilă numai dacă $\mathbf{u}|_{S_1} = 0$. ⌟

Teorema 5.2. *Soluția ordinară a problemei Cauchy* $\mathbf{u}|_{S_0} = \mathbf{u}_0$ *a sistemului* $\mathbf{Lu} = \mathbf{F}$ *este unică în orice domeniu lenticular* D_{n+1} (adică D_{n+1} este astfel încît $\partial D_{n+1} = S_0 \cup S_1$, iar S_0 și S_1 sînt hipersuprafețe de tip spațial).

⌜ Va fi suficient să arătăm că sistemul $\mathbf{Lu} = 0$ în condiția $\mathbf{u}_0 = 0$ admite soluția banală ca singură soluție în D_{n+1}. Aplicăm din nou formula (5.15), în ipotezele noastre vom obține din nou egalitatea (5.16); în baza teoremei 5.1, primul termen al acestei egalități va fi nul și deci în D_{n+1} avem neapărat

$$\int_{D_{n+1}} (\mathbf{B}_1 \mathbf{u}, \mathbf{u})_m \, dx = 0$$

și deoarece $(\mathbf{B}_1 \mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$, va trebui să avem neapărat $\mathbf{u} = 0$ în D_{n+1}. ⌟

O b s e r v a ț i e. Demonstrațiile anterioare se pot repeta fără a presupune că hipersuprafața S_0 care poartă datele este de tip spațial.

Dacă în sistemul considerat matricea $\mathbf{B}$ este nulă, atunci acest sistem se numește *conservativ*. Dacă notăm $\mathbf{a} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, atunci calculele anterioare arată că integrala $E = \int_S (\mathbf{au}, \mathbf{u})_m d\sigma$ nu-și modifică valoarea dacă se trece de la o hipersuprafață de tip spațial S la alta de același tip. Din această cauză E poartă de numirea de *energia* sistemului considerat sau *integrală a energiei* sistemului în cauză. Deci *în cazul sistemelor conservative, energia se păstrează.*

5.1.3. Existența soluțiilor slabe pentru sisteme hiperbolice

Vom presupune că D_n este un domeniu din $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}_j$ și $\mathbf{B}$, $j = 1,2,\ldots,n$, sînt matrice de ordin m ale căror elemente sînt funcții reale continue în D_n iar matricele $\mathbf{A}_j$ sînt simetrice; în plus, și matricile $\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_k}$ și $\mathbf{B}$ sînt continue și mărginite în D_n. Vom utiliza notația (5.12) precum și notația

$$\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u} = \mathbf{Au} + \lambda \mathbf{u}. \tag{5.17}$$

Deoarece sistemul considerat este hiperbolic, avem

$$(\mathbf{A}_0 \xi, \xi)_m \geqslant a \|\xi\|^2, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m), \quad a > 0, \tag{5.18}$$

și deoarece matricele $\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_k}$ și $\mathbf{B}$ sînt mărginite, avem inegalitatea

$$\left(\left[\mathbf{B} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j} \right] \xi, \xi \right)_m \leqslant c \|\xi\|^2, \quad c > 0. \tag{5.18'}$$

Teorema 5.3. *Dacă* $\lambda a > c$, *atunci pentru orice* φ *avînd componentele din* $C_0^\infty(D_n)$ *este valabilă inegalitatea*

$$\|\varphi\| \leqslant \frac{1}{\lambda a - b} \|\mathbf{A}_\lambda^+ \varphi\| \tag{5.19}$$

norma fiind calculată $L^2(D_n)$.

⌜ Vom utiliza formula (5.13) în care vom pune $\mathbf{u} = \varphi$, ceea ce face ca integrala relativă la frontieră să dispară și vom obține

$$(\mathbf{A}\varphi, \varphi) = -(\varphi, \mathbf{A}\varphi) + \int_{D_n} \left(\left[2\mathbf{B} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j} \right] \varphi, \varphi \right)_m dx,$$

de unde va rezulta

$$(\mathbf{A}\varphi, \varphi) = \int_{D_n} \left(\left[\mathbf{B} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j} \right] \varphi, \varphi \right)_m dx$$

sau ţinînd seama de (5.17),

$$(\mathrm{A}_\lambda \varphi, \varphi) = \lambda(\mathbf{A}_0 \varphi, \varphi) + \left(\left[\mathbf{B} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j}\right]\varphi, \varphi\right).$$

Utilizînd inegalităţile (5.18) şi (5.18′), găsim

$$|(\mathrm{A}_\lambda \varphi, \varphi)| = |(\varphi, \mathrm{A}_\lambda^+ \varphi)| \leqslant \lambda a \|\varphi\|^2 - \|\varphi\|^2 = (\lambda a - c)\|\varphi\|^2,$$

deoarece $\left|\left(\left[\mathbf{B} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j}\right]\varphi, \varphi\right)\right| \leqslant c\|\varphi\|^2$ şi deci $\left(\left[\mathbf{B} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j}\right]\times\right.$ $\left.\times\varphi, \varphi\right) \leqslant -\|\varphi\|^2$; inegalitatea (5.19) este astfel demonstrată căci $|(\varphi, \mathrm{A}_\lambda^+ \varphi)| \leqslant \|\varphi\|\,\|\mathrm{A}_\lambda^+\varphi\|$. ⌟

Teorema 5.4. *Dacă* $\lambda a > c$, *atunci există cel puţin un vector* $\mathbf{u} \in L^2(D_n)$ *astfel încît pentru orice* φ (vector test) *să se verifice relaţia*

$$(\mathbf{u}, \mathrm{A}_\lambda^+ \varphi) = (f, \varphi).$$

⌜ Fie $\mathscr{D}(\mathrm{A}_\lambda^+) = C_0^\infty(D_n)$ şi fie $\widetilde{B}$ mulţimea valorilor lui A_λ^+; avem $\widetilde{B} \subset L^2$. Fie $\psi \in \widetilde{B}$, arbitrar şi să considerăm ecuaţia $\mathrm{A}_\lambda^+ \varphi = \psi$. Dacă $\lambda a - c > 0$, atunci în baza teoremei 5.3, operatorul A_λ^+ va fi inversabil, deci $\varphi = (\mathrm{A}_\lambda^+)^{-1}\psi$ iar din (5.19) se obţine

$$\|\varphi\| \leqslant \frac{1}{\lambda a - c}\|\psi\|.$$

Calculînd produsul scalar (f, φ), găsim

$$(f, \varphi) = (f, (\mathrm{A}_\lambda^+)^{-1}\psi) = l_f(\psi),$$

$l_f(\psi)$ fiind o funcţională liniară în raport cu f. Deoarece

$$|l_f(\psi)| = |(f, \varphi)| \leqslant \|f\|\,\|\varphi\| \leqslant \frac{1}{\lambda a - c}\|f\|\,\|\psi\|,$$

funcţionala $l_f(\psi)$ va fi funcţională liniară şi mărginită în $\widetilde{B}$ şi deci va putea fi prelungită pînă la o funcţională liniară şi mărginită pe L^2;

aplicînd teorema de repezentare Riesz, va exista elementul $g \in L^2$ astfel încît $l_f(\psi) = (g, \psi)$, oricare ar fi $\psi \in L^2$. Dar deoarece $l_f(\psi) = (f, \varphi) = (u, \mathrm{A}_\lambda^+ \varphi)$ iar $\psi = \mathrm{A}_\lambda^+ \varphi$, vom obţine egalitatea $(u, \psi) = (g, \psi)$ şi deci $u = g$ este o soluţie slabă a sistemului considerat. ⌟

Soluţia slabă determinată prin teorema 5.4 nu va fi unică deoarece funcţionala $l_f(\psi)$ se poate prelungi într-o infinitate de moduri pînă la o funcţională liniară şi mărginită pe L^2. În plus aceasta se poate observa imediat deoarece nu s-a impus condiţia iniţială.

Să revenim la identitatea integrală (5.13); scăzînd şi adunînd în membrul al doilea integrala $\int_{D_n} (\mathbf{u}, \mathbf{Bu})_m \, \mathrm{d}\mathbf{x}$, această identitate se mai poate scrie şi sub forma

$$(\mathbf{Au}, \mathbf{u}) = -(\mathbf{u}, \mathbf{Au}) + \int_{D_n}(\mathbf{u}, \mathbf{Bu})_m \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{D_n}\left(\left[\mathbf{B} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j}\right]\mathbf{u}, \mathbf{u}\right)_m \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial D_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{A}_j \nu_j \mathbf{u}, \mathbf{u}\right)_m \mathrm{d}\sigma$$

sau sub forma

$$\mathrm{Re}\,(\mathbf{Au}, \mathbf{u}) = \int_{D_n}\left(\left[\mathbf{B} + \mathbf{B}^t - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j}\right]\mathbf{u}, \mathbf{u}\right)_m \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial D_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\nu_j \mathbf{A}_j \mathbf{u}, \mathbf{u}\right)_m \mathrm{d}\sigma. \tag{5.20}$$

Să presupunem că operatorul A este astfel încît sînt îndeplinite condiţiile

$$\mathbf{B} + \mathbf{B}^t - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j} \leqslant 0, \quad \int_{\partial D_n}\left(\mathbf{u}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{A}_j \nu_j, \mathbf{u}\right)_m \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{5.21}$$

În aceste condiţii operatorul A, presupus definit pe mulţimea funcţiilor $\mathbf{u}$ pentru care toate operaţiile efectuate pînă aici sînt permise, va verifica inegalitatea

$$\mathrm{Re}(\mathbf{Au}, \mathbf{u}) \leqslant 0, \quad \mathbf{u} \in \mathscr{D}(\mathrm{A}). \tag{5.22}$$

Dacă A^+ este operatorul diferențial formal adjunct al operatorului A, definit prin (5.12), se verifică imediat relațiile

$$A^+\mathbf{u} = -\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \left(\mathbf{B} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial x_j}\right)\mathbf{u},$$

$$\mathrm{Re}(A^+\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leqslant 0, \quad \mathbf{u} \in \mathscr{D}(A^+).$$

Un operator liniar A astfel încît $\overline{\mathscr{D}(A)} = H$, H fiind un spațiu Hilbert, se numește *disipativ* dacă se verifică condiția (5.22).

Să arătăm acum că dacă pentru un operator disipativ A se verifică condiția

$$\mathrm{Re}(A^* u, u) \leqslant 0, \ u \in \mathscr{D}(A), \tag{5.23}$$

A^* fiind operatorul adjunct al lui A definit prin $(Au, v) = (u, A^*v)$, $\forall (u, v) \in H$, atunci sînt îndeplinite condițiile teoremei 4.8 și deci A poate fi considerat ca generatorul infinitezimal al unui semigrup de operatori din spațiul Hilbert H. Pentru aceasta fie $u \in \mathscr{D}(A)$ și $\lambda \in C$ astfel încît $\mathrm{Re}\lambda > 0$; să notăm $v = (A - \lambda I)u$. Găsim imediat

$$(v, u) = (Au, u) - \lambda \|u\|^2,$$

deci

$$-\mathrm{Re}(v, u) \geqslant (\mathrm{Re}\,\lambda)\|u\|^2$$

și deoarece $-\mathrm{Re}(v, u) \leqslant \|v\| \cdot \|u\|$, rezultă inegalitatea

$$\|v\| \geqslant \|u\|(\mathrm{Re}\,\lambda),$$

care arată că operatorul $A - \lambda I$ admite invers iar $\|(A - \lambda I)^{-1}\| < \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}$; comparînd cu teorema amintită, rezultă $M \leqslant 1$, $\beta = 0$ și evident $\|(A - \lambda I)^{-k}\| \leqslant (\mathrm{Re}\,\lambda)^{-k}$. Rămîne de arătat că $\overline{\mathscr{R}(A - \lambda I)}^{*)} = H$. Or, dacă se presupune $\overline{\mathscr{R}(A - \lambda I)} = H_0 \subset H$, se poate găsi $w \in H$ astfel încît $(Au - \lambda u, w) = 0$, $u \in \mathscr{D}(A)$; deci $(u, (A^* - \bar{\lambda} I)w) = 0$, ceea ce înseamnă $w \in \mathscr{D}(A^*)$ iar $A^* w = \bar{\lambda} w$. Prin înmulțire scalară cu w, găsim

$$(A^* w, w) = \lambda \|w\|^2$$

*) $\mathscr{R}(A)$ este mulțimea valorilor operatorului A.

sau

$$\mathrm{Re}(A^* w, w) = \|w\|^2 \,\mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

ceea ce contrazice inegalitatea (5.23). Așadar, rezultă că în cazul operatorilor simetrici hiperbolici se pot aplica toate considerațiile făcute la 4.2 și deci există întotdeauna soluții slabe pentru astfel de sisteme [dacă sînt îndeplinite condițiile (5.21)].

5.2. Soluția elementară a ecuației undelor și consecințele ei

5.2.1. Rezolvarea problemei Cauchy restrînse

Definind operatorul $\Box_n$ (citit dalembertian) prin

$$\Box_n u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n u, \quad \Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

ecuația cu derivate parțiale

$$\Box_n u = F, \tag{5.24}$$

în care $F = F(t, \mathbf{x})$ este o distribuție sau o funcție convenabil definită în $\mathbb{R}^{n+1}$, se va numi ecuația undelor din $\mathbb{R}^n$; condițiile

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_{t=\tau} = f(\mathbf{x}), \ \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.25}$$

vor defini problema Cauchy restrînsă atașată ecuației undelor (f și g se pot presupune fie distribuții fie funcții definite pe $\mathbb{R}^n$).

Utilizînd rezultatele din 2.4, soluția elementară a problemei (5.25) pentru ecuația undelor din $\mathbb{R}^{2m+1}$, $m = 1, 2, \ldots$, va fi

$$\left(\omega_n = 2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)$$

$$\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\omega_{2m+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1} \left[\frac{1}{t}\,\delta(t - \|\mathbf{x}\|)\right], m = 1, 2, \ldots, \tag{5.26}$$

adică

$$\square_n \mathscr{E}_t(\mathbf{x}) = 0,\ t>0,\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ \mathscr{E}_t(\mathbf{x})\Big|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial \mathscr{E}_t(\mathbf{x})}{\partial t}\Big|_{t=0} = \delta(\mathbf{x}),$$

iar soluția elementară a operatorului $\square_{2n-1}$ va fi

$$\mathscr{E}(t,\mathbf{x}) = \mathscr{E}_t(\mathbf{x})H(t) = \frac{\sqrt{\pi}H(t)}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega_{2m+1}}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left[\frac{1}{t}\,\delta(t - \right.$$

$$\left. - \|\mathbf{x}\|)\right],\ m = 1,2,\ldots, \tag{5.26'}$$

$H(t)$ fiind distribuția unitate din $\mathbb{R}$.

Prin urmare, o soluție a ecuației (5.24) omogene, adică a ecuație

$$\square_n u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \Delta_n u_0 = 0 \tag{5.24'}$$

se scrie sub forma

$$u_0(t,\mathbf{x}) = \mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 g(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 f(\mathbf{x})\right], \tag{5.27}$$

deoarece $\left.\frac{\partial^2 \mathscr{E}_t}{\partial t^2}\right|_{t=0} = 0$, adică

$$u_0(t,\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega_{2m+1}}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left[\frac{1}{t}\,\delta(t-\|\mathbf{x}\|) *_1 g(\mathbf{x})\right] +$$

$$+ \frac{t\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega_{2m+1}}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m}\left[\frac{1}{t}\,\delta(t-\|\mathbf{x}\|) *_1 f(\mathbf{x})\right],\ m = 1,2,\ldots, \tag{5.27'}$$

ținînd seama că $\frac{\partial}{\partial t} = 2t\frac{\partial}{\partial t^2}$.

O soluție particulară a ecuației (5.24) va fi

$$u_p(t,\mathbf{x}) = \mathscr{E}(t,\mathbf{x}) * F(t,\mathbf{x}) \tag{5.28}$$

dacă u_p este această soluție; evident, se presupune că distribuțiile f, g și F sînt astfel încît toate convoluțiile în cauză au sens, ceea ce se întîmplă, de exemplu, dacă f și g au suportul compact în $\mathbb{R}^n$ iar $F(t,\mathbf{x}) = 0$ pentru $t<0$ iar pentru orice $t\geqslant 0$, F are suportul compact în $\mathbb{R}^n$.

În ipoteza că f, g și F sînt distribuții regulate, formulele anterioare se pot exprima cu ajutorul unor integrale; utilizînd definiția produsului de convoluție, avem

$$\langle \mathscr{E}_t(\mathbf{x}) * g(x), \varphi(x)\rangle = \langle g(\mathbf{x}), \langle \mathscr{E}_t(\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle\rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega_{2m+1}}\left\langle g(\mathbf{x}), \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left[\frac{1}{t}\,\delta(t - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \|\mathbf{y}\|)\right], \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right\rangle\right\rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega_{2m+1}}\left\langle g(\mathbf{x}), \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{\|\mathbf{y}\|=t}\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,d\sigma_y\right]\right\rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega_{2m+1}}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{\|\mathbf{y}\|=t}\langle g(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle\,d\sigma_y\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega_{2m+1}}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{\|\mathbf{y}\|=t}\langle g(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x})\rangle\,d\sigma_y\right] =$$

$$= \left\langle \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega_{2m+1}}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{\|\mathbf{y}\|=t} g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\sigma_y\,,\ \varphi(\mathbf{x})\right\rangle,$$

ceea ce înseamnă

$$\mathscr{E}_t(\mathbf{x}) *_1 g(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega_{2m+1}}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{\|\mathbf{y}\|=t} g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}(t^{2m-1}M_t^{\mathbf{x}}[g]),\quad m=1,2,\ldots,$$

unde $M_t^{\mathbf{x}}[g]$ este media sferică, pe sfera de rază t cu centrul în punctul $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $n=2m+1$, adică

$$M_t^{\mathbf{x}}[g] = \frac{1}{t^{n-1}\omega_n}\int\limits_{\|\mathbf{y}\|=t} g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}\left(=\frac{1}{t^{n-1}\omega_n}\int\limits_{\|\mathbf{y}\|=t} g(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}\right).$$

Înlocuind în (5.27′), se obține

$$u_0(t,\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}(t^{2m-1}M_t^{\mathbf{x}}[g]) +$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\,t}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m}(t^{2m-1}M_t^{\mathbf{x}}[f]), \qquad (5.29)$$

$$m=1,2,\ldots$$

Calculul analoage conduc la egalitatea

$$u_p(t,\mathbf{x}) = \int_0^t \mathscr{E}_{t-s}(\mathbf{x}) *_1 F(s,\mathbf{x})\,\mathrm{d}s, \qquad (5.29')$$

dacă $F(t,\mathbf{x})$ este o distribuție regulată nulă pentru $t<0$; cum se verifică ușor că $u_p\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial u_p}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$, rezultă că suma

$$u(t,\mathbf{x}) = u_0(t,\mathbf{x}) + u_p(t,\mathbf{x}) \qquad (5.30)$$

va defini o soluție de clasă C^2 a problemei Cauchy (5.25) pentru ecuația (5.24) (în ipoteze convenabile pentru f, g și F: $f\in C^{m+2}(\mathbb{R}^n)$, $g\in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $F\in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ pentru orice $t\geqslant 0$).

5.2.2. Metoda de coborîre

La punctul anterior s-a dedus o soluție a problemei Cauchy restrînse pentru ecuația undelor $\Box_{2m+1}u=F$ și pentru a putea considera rezolvată această problemă Cauchy mai trebuie obținută soluția ecuației $\Box_n u=F$ pentru n par. În acest scop se poate utiliza metoda de coborîre care permite determinarea soluției problemei Cauchy (5.25) pentru ecuația $\Box_{2m}u=F$ din soluția unei probleme Cauchy restrînse pentru ecuația $\Box_{2m+1}u=F$.

Metoda de coborîre afirmă că soluția problemei Cauchy

$$u(t,\mathbf{x}')\Big|_{t=0} = f(\mathbf{x}'),\ \frac{\partial u(t,\mathbf{x}')}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(\mathbf{x}'),\ \mathbf{x}'\in\mathbb{R}^{2m},\ m=1,2,\ldots \qquad (5.31)$$

pentru ecuația $\Box_{2m}u=F$ coincide cu soluția aceleiași probleme Cauchy dar pentru ecuația $\Box_{2m+1}u(t,\mathbf{x})=F(t,\mathbf{x}')$, $\mathbf{x}=(\mathbf{x}',x_{2m+1})$. Într-adevăr, deoarece $\mathbf{x}=(\mathbf{x}',x_{2m+1})=(x_1,\ldots,x_{2m},x_{2m+1})$ [cu $\mathbf{x}'=(x_1,\ldots,x_{2m})$], dacă arătăm că în ipoteza că f, g și F nedepinzînd de variabila x_{2m+1}, atunci nici soluția (5.30) nu va depinde de variabila x_{2m+1}, atunci cum $\dfrac{\partial}{\partial x_{2m+1}}u = \dfrac{\partial^2}{\partial x_{2m+1}^2}u = 0$ și ecuația $\Box_{2m+1}u(t,\mathbf{x}) = F(t,\mathbf{x}')$ se transformă în ecuația $\Box_{2m}u(t,\mathbf{x}')=F(t,\mathbf{x}')$, condițiile inițiale fiind evident satisfăcute.

Fie deci $v=v(t,\mathbf{x})$ soluția ecuației $\Box_{2m+1}v=F(t,\mathbf{x}')$ care verifică datele inițiale (5.31′) și fie $w=\dfrac{\partial v}{\partial x_{2m+1}}$; derivînd ecuația

$$\Box_{2m+1}v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 v}{\partial x_{2m}^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_{2m+1}^2} = F(t,\mathbf{x}')$$

în raport cu x_{2m+1}, se obține ecuația

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_{2m+1}}\right) - \Delta_{2m+1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_{2m+1}}\right) = 0$$

şi deci w este o soluţie a ecuaţiei omogene $\Box_{2m+1}w = 0$. În plus se vor verifica datele Cauchy

$$w\Big|_{t=0} = \frac{\partial v}{\partial x_{2m+1}}\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x_{2m+1}}\left(v\Big|_{t=0}\right) = \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial x_{2m+1}} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x_{2m+1}}\right)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x_{2m+1}}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}\right) = \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial x_{2m+1}} = 0$$

şi cum singura soluţie a ecuaţiei undelor omogenă care verifică date Cauchy nule este soluţia banală (vezi 5.1), se deduce $w = 0$, adică $\dfrac{\partial v}{\partial x_{2m+1}} = 0$ (pentru orice $t \geqslant 0$ şi $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{2m}$). Prin urmare, v nu depinde de variabila x_{2m+1}.

Vom utiliza această metodă ulterior în cazul ecuaţiei $\Box_2 u = F$ (vezi 5.2.5) iar acum vom deduce forma soluţiei problemei Cauchy restrînse pentru ecuaţia $\Box_{2m}u = 0$. Notînd

$$u(t, \mathbf{x};\ g) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}(t^{2m-1}M_t^{\mathbf{x}}[g])$$

în ipoteza $g = g(x_1, x_2, \ldots, x_{2m})$ (deci lipseşte variabila x_{2m+1}), integrala de suprafaţă care defineşte media sferică $M_t^{\mathbf{x}}[g]$ se poate transforma într-o integrală calculată în interiorul sferei $(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_{2m} - x_{2m})^2 = t^2$; avem

$$M_t^{\mathbf{x}}[g] = \frac{1}{\omega_{2m+1}t^{2m}}\int\limits_{\|\mathbf{y}\|=t} g(x_1 + y_1, \ldots, x_{2m} + y_{2m})\,\mathrm{d}\sigma_n =$$

$$= \frac{1}{\omega_{2m+1}\,t^{2m}}\int\limits_{S_t^{(1)}} g(x_1 + y_1, \ldots, x_{2m} + y_{2m})\,\mathrm{d}\sigma_n +$$

$$+ \frac{1}{\omega_{2m+1}t^{2m}}\int\limits_{S_t^{(2)}} g(x_1 + y_1, \ldots, x_{2m} + y_{2m})\,\mathrm{d}\sigma_n,$$

unde $S_t^{(1)}$ şi $S_t^{(2)}$ sînt emisfera superioară, respectiv inferioară a sferei $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = t$. Deoarece pe sferă avem

$$\mathrm{d}\sigma_n = \frac{t\,\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_{2m}}{\sqrt{t^2 - y_1^2 - \ldots y_{2m}^2}} = \frac{t\mathrm{d}\mathbf{y}'}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{y}'\|^2}}$$

cu $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{2m})$, $\mathbf{y}' = (y_1, \ldots, y_{2m})$, $\mathrm{d}\mathbf{y}' = \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_{2m}$, se deduce

$$M_t^{\mathbf{x}}[g(\mathbf{x}')] = \frac{2}{\omega_{2m+1}t^{2m-1}}\int\limits_{\|\mathbf{y}'\|<t} \frac{g(\mathbf{x}' + \mathbf{y}')\,\mathrm{d}\mathbf{y}'}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{y}'\|^2}}$$

şi deci

$$u(t, \mathbf{x};\ g) = \frac{\sqrt{\pi}}{\omega_{2m+1}\,\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{m-1}\int\limits_{\|\mathbf{y}'-\mathbf{x}'\|<t} \frac{g(\mathbf{y}')\,\mathrm{d}\mathbf{y}'}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{y}' - \mathbf{x}'\|^2}} =$$

$$= \frac{1}{\omega_n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\int\limits_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|<t} \frac{g(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}}, \qquad n = 2m$$

deoarece se verifică uşor că $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\omega_{2m+1}\,\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{\omega_{2m}\Gamma(m)}$.

În concluzie, soluţia problemei Cauchy

$$u(t, \mathbf{x})\,|_{t=0} = f(\mathbf{x}), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(\mathbf{x})$$

pentru ecuaţia $\Box_n u = F(t, \mathbf{x})$, $n = 2m$, se scrie

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\int\limits_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|<t} \frac{g(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}} +$$

$$+ \frac{2t}{\omega_n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n}{2}}\int\limits_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|<t} \frac{f(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}} +$$

$$+ \frac{1}{\omega_n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^t\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^{\frac{n}{2}}\int\limits_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|<r} \frac{F(s, \mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}}{\sqrt{r^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}}\Big|_{r=t-s}\mathrm{d}s.$$

5.2.3. Ecuația coardei vibrante. Interpretări fizice

La punctul 2.4.3 s-a obținut atît soluția elementară pentru ecuația coardei vibrante cît și soluția problemei Cauchy restrînse

$$u(t, x)|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Presupunînd că ecuația coardei vibrante s-a scris sub forma

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x), \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R},$$

rezultatele anterioare rămîn valabile cu condiția să se scrie at în loc de t. În cazul distribuțiilor regulate se obține formula

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x + at) + (f(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(z)\,dz +$$

$$+ \frac{a}{2}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(s, z)\,dz, \tag{5.31}$$

care, dacă $F = 0$, ia forma

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(z)\,dz \tag{5.32}$$

și se numește *formula lui d'Alembert.*

Uneori, termenul care conține contribuția la soluție a factorului perturbator F se mai scrie și sub o altă formă, care se obține cu schimbarea de variabilă $a(t - s) = r$; se găsește expresia

$$\frac{a}{2}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(s, z)\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{at} dr \int_{x-r}^{x+r} F\left(t - \frac{r}{a}, z\right) dz,$$

care, deoarece conține funcția F nu la momentul t ci la un moment întîrziat $t - r/a$, poartă denumirea de *potențial hiperbolic întîrziat*

(pe dreaptă). Din relația (5.31) este evident că $u \in C^2(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R})$ dacă $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ iar $F \in C^1(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R})$. În plus, rezultă că soluția este stabilă în raport cu f, g și F dacă $0 \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty$, deoarece este evident că dacă

$$\|f - f^*\| < \varepsilon, \ \|g - g^*\| < \varepsilon, \ \|F - F^*\| < \varepsilon,$$

avem

$$\|u - u^*\| \leqslant M(T),$$

u^* fiind soluția care corespunde datelor, f^*, g^* și F^* iar $\|\cdot\|$ este norma uniformă.

Luînd în considerare formula lui d'Alembert

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g_1(z)\,dz,$$

dacă g_1 este o primitivă a funcției g, deci $g_1' = g$, această relație se poate scrie și sub forma

$$u(t, x) = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \tag{5.32'}$$

unde

$$\varphi(x - at) = \frac{1}{2}f(x - at) - \frac{1}{2a}g_1(x - at),$$

$$\psi(x + at) = \frac{1}{2}f(x + at) + \frac{1}{2a}g_1(x + at).$$

La început, să construim graficul funcției $\varphi(x - at)$ pentru trei valori $t_0 < t_1 < t_2$. Luînd în considerație graficele din fig. 5.1, se constată că al doilea grafic va fi tot primul grafic, asupra căruia t-a efectuat o translație de vector at_1 (dirijat de-a lungul axei Ox); al treilea grafic reprezintă de asemenea o translație spre dreapta a pri-

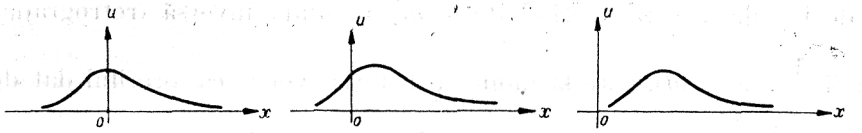

Fig. 5.1.

mului grafic de vector at_2. Dacă se proiectează succesiv aceste grafice pe un ecran fix, atunci observatorul va vedea că primul grafic se deplasează spre dreapta [sau, ceea ce este același lucru, un obser-

vator care se mișcă de-a lungul coardei cu viteza a și care este legat de sistemul de coordonate ($\xi = x - at$, u), va vedea coarda cu același profil $\varphi(x - at) = \varphi(\xi)$].

Faptul că s-a integrat ecuația coardei vibrante numai în condițiile inițiale, fizic înseamnă că nu avem condiții la capetele coardei, deci practic, această coardă este atît de lungă încît condițiile de la capete nu influențează porțiunea de coardă în intervalul de timp care ne interesează. Din interpretarea aceasta, rezultă că funcția $\varphi(x - at)$ dă naștere unei unde care se deplasează spre dreapta cu viteză constantă $a\left[= \sqrt{\frac{T}{\rho}}\right.$, T fiind tensiunea în coardă iar ρ densitatea liniară a acesteia$\left.\right]$. Funcția $\psi(x + at)$ care apare în (5.32′) va reprezenta fizic tot o undă, dar a cărei deplasare are loc spre stînga, cu aceeași viteză constantă a. Într-adevăr, dacă la momentul inițial ne aflăm în punctul x al coardei și dacă ne deplasăm spre stînga cu viteză constantă a, după timpul t vom ajunge în punctul $x = x_0 - at$ sau $x + at = x_0$; dar atunci $u(t, x) = \psi(x + at) = \psi(x_0)$, deoarece din (5.32′) luăm în considerație numai al doilea termen.

În acest mod funcția $u(t,x)$ definită prin (5.32′) arată că iau naștere două unde : o *undă directă*, care la momentul inițial are graficul (forma) $u = \varphi(x)$ și care se deplasează spre dreapta cu viteză constantă a și o *undă inversă* (sau *retrogradă*), care la momentul inițial ($t = 0$) are graficul $u = \psi(x)$ și care se deplasează spre stînga cu aceeași viteză a. De exemplu, dacă presupunem că la momentul inițial vitezele inițiale sînt nule (adică $g = 0$) iar forma inițială a coardei este dată de graficul funcției $u = f(x)$, în baza formulei lui D'Alembert, deplasarea coardei în punctul x la momentul $t > 0$ va fi dată de funcția

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)]$$

și deci unda directă va fi $\frac{1}{2}f(x - at)$ iar unda inversă (retrogradă) va fi $\frac{1}{2}f(x + at)$, care la momentul inițial vor avea profilul dat de funcția $\frac{1}{2}f(x)$ (atît unda directă cît și cea inversă). În baza interpretării anterioare, unda directă va fi de fapt graficul funcției $\frac{1}{2}f(x)$

care se va deplasa spre dreapta cu viteza constantă a iar unda inversă se obține deplasînd spre stînga același grafic, cu aceeași viteză. Prin urmare, dacă de exemplu funcția f este nulă în afara intervalului $[x_1, x_2]$, profilul coardei la orice moment se construiește foarte simplu : nu avem decît să luăm două exemplare ale graficului funcției $u = \frac{1}{2}f(x)$ și să le deplasăm către dreapta și stînga intervalului $[x_1, x_2]$ cu viteza a și apoi să adunăm rezultatele obținute în fiecare punct al coardei. Dacă $f = 0$ iar $g \neq 0$, deci dacă la momentul $t = 0$ avem de-a face numai cu viteze inițiale, problema se tratează analog, utilizînd o primitivă g_1 a funcției g ; avem

$$u(t, x) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(z)\,dz = \frac{1}{2a}g_1(x + at) - g_1(x - at)], \quad g_1' = g,$$

și deci unda directă va avea profilul inițial dat de graficul funcției $\frac{1}{2a}g_1(x)$ ca și unda inversă, rezultatul final obținîndu-se însă prin scăderea efectelor obținute în fiecare punct al coardei.

O reprezentare grafică mult mai intuitivă a fenomenului reprezentat analitic prin formula lui d'Alembert se poate obține dacă luăm în considerație planul xOt în locul planului xOu utilizat pînă acum. Pentru ușurință, vom presupune că este vorba de mișcarea unei coarde vibrante care oscilează în baza unei perturbații inițiale localizate în intervalul $[x_1, x_2]$, deci vom presupune $g = 0$ iar $f(x) \neq 0$ dacă $x \notin [x_1, x_2]$. Atunci, în baza formulei lui d'Alembert, oscilația în punctul x al coardei la momentul $t > 0$, va fi dată de

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)].$$

în care apar sumele $x - at$ și $x + at$; or este ușor de verificat că familiile de drepte $x - at = C_1$, $x + at = C_2$ reprezintă caracteristicile ecuației coardei. Forma $f(x - at)$ a primului termen al soluției arată că funcția $f(x - at)$ este constantă pe orice caracteristică din familia $x - at = C_1$ [deoarece dacă (x, t) este un punct pe o astfel de caracteristică, vom avea $x - at = x_0$, dacă x_0 este punctul de pe axa Ox în care caracteristica în cauză intersectează această axă și deci avem $f(x - at) = f(x_0)$] ; analog, funcția $f(x + at)$ va fi constantă pe orice caracteristică din familia $x + at = C_2$ (evident, valoarea constantei diferă de la o caracteristică la alta din aceeași familie). Deoarece $u(t, x) = \frac{1}{2}f(x - at) + \frac{1}{2}f(x + at)$, rezultă că în

punctul P avînd coordonatele (x, t) în spaţiul xOt valoarea lui u se obţine calculînd f pe cele două caracteristici care trec prin punctul P şi luînd semisuma acestor valori; deci $u(t, x) = +\frac{1}{2}f(x') + \frac{1}{2}f(x'')$, x' şi x'' fiind punctele de pe axa Ox în care caracteristicile $x - at = C_1$ şi $x + at = C_2$ care trec prin P intersectează această axă. Conform cu această situaţie, vom duce caracteristicile punctelor x_1 şi x_2 de pe axă ($f \neq 0$ dacă $x \in]x_1, x_2[$) care vor divide semiplanul $t > 0$ şi şase zone (vezi fig. 5.2) notate de la I la VI. Oricare ar fi punctele din zonele I, III şi V, în aceste puncte avem $u = 0$ (de exemplu, dacă luăm un punct din zona III, ducînd caracteristicile acestui punct, ele vor tăia axa în punctele α şi β în care $f = 0$ şi deci $u = \frac{1}{2}[f(\alpha) + f(\beta)] = 0$); în zonele II, IV şi VI avem $u \neq 0$. De aceea, pentru a vedea ce se întîmplă într-un punct al coardei în decursul timpului, nu avem decît să ducem o paralelă la axa Ot prin acest punct. Dacă luăm de exemplu un punct situat la dreapta lui x_2, o paralelă la axa Ot dusă prin acest punct va trece succesiv prin zonele I, II, III, ceea ce fizic se traduce prin faptul că într-un interval de timp (necesar pentru a ajunge în zona II) $u = 0$, deci coarda se află în repaos; apoi în intervalul în care se străbate zona II avem $u \neq 0$, deci coarda în acest punct, în acest interval de timp va oscila; apoi oscilaţiile vor

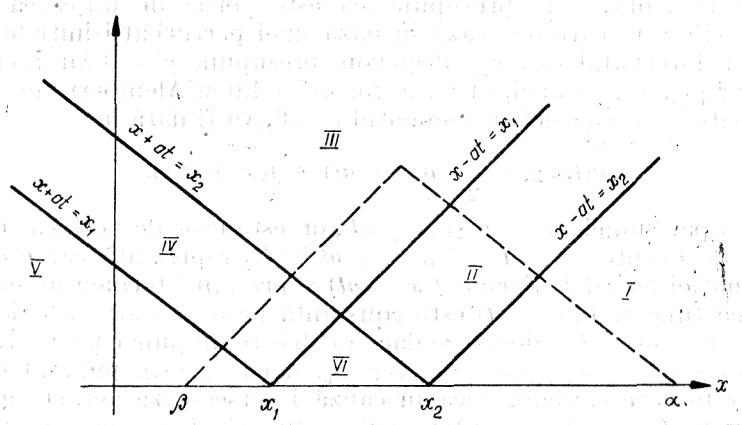

Fig. 5.2

înceta cînd se va trece în zona III. Aşadar, efectul iniţial localizat în intervalul $[x_1, x_2]$ se va deplasa atît în stînga cît şi în dreapta, punîndu-se în evidenţă cele două unde.

Tot în spaţiul xOt putem constata ce se întîmplă cu coarda la un moment dat $t_0 > 0$; pentru aceasta nu avem decît să ducem o paralelă la axa Ox la distanţa t_0 de aceasta; o astfel de paralelă va intersecta fie zonele V, IV, III, II şi I (ceea ce înseamnă că vor fi în oscilaţie doar partea din coardă care se află în zonele IV, VI şi II), fie în zonele V, IV, III, II şi I (ceea ce face să fie în oscilaţie doar părţile din coardă aflate în zonele IV şi II). În prima situaţie, apar cele două unde care nu s-au separat iar în situaţia cealaltă sînt efectiv puse în evidenţă cele două unde: cea directă şi cea retrogradă (inversă).

Exerciţii

1°. Soluţia ecuaţiei coardei

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

care verifică datele Cauchy $u|_{t=0} = f(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ este $u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)]$. Să se arate că această soluţie se poate obţine şi din soluţia ecuaţiei obţinute prin metoda separării variabilelor.

R. Scriind $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$, avem $a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(y)\sin\left(\frac{k\pi}{l}y\right)dy$ şi deci $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$; deoarece

$$\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{ak\pi}{l}t\right) = \frac{1}{2}\sin\left[\frac{\pi k}{l}(x + at)\right] + \frac{1}{2}\sin\left[\frac{\pi k}{l}(x - at)\right],$$

vom avea

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left[\frac{k\pi}{l}(x + at)\right] + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left[\frac{k\pi}{l}(x - at)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}f(x + at) + \frac{1}{2}f(x - at).$$

2°. Să se arate că soluţia ecuaţiei coardei

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x),$$

care verifică date Cauchy nule, se poate obţine şi cu ajutorul principiului lui Duhamel.

R. Scriind $u(t, x) = \int_0^t v(t-s, s, x)\,ds$, unde $v = v(t, s, x)$ verifică ecuația omogenă $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ pentru orice $s \geqslant 0$, și condițiile Cauchy $v|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = a^2F(s, x)$ prin calcul rezultă că u verifică condițiile solicitate; deoarece din formula lui d'Alembert rezultă

$$v(t, s, x) = \frac{a}{2}\int_{x-at}^{x+at} F(s, y)\,dy,$$

se obține

$$u(t, x) = \frac{a}{2}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} F(s, y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{at} dr \int_{x-r}^{x+r} F\left(t - \frac{r}{a}, y\right) dy,$$

ultima egalitate obținîndu-se prin schimbarea de variabilă $r = a(t-s)$, $ds = -\frac{1}{a}\,dr$.

3°. Să se arate că soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x + t$$

care verifică datele Cauchy $u|_{t=0} = x^2$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x$ este

$$u(t, x) = x^2 + xt + a^2t^2 + \frac{a^2}{2}xt^2 + \frac{a^2}{6}t^3.$$

4°. Să se arate că soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{x+t}$$

care verifică date Cauchy nule este

$$u(t, x) = \frac{a^2}{a^2 - 1}e^x\left[\operatorname{ch}(at) + \frac{1}{a}\operatorname{sh}(at) - e^t\right].$$

5°. Să se arate că soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2}{a^2} - t^2$$

care verifică date Cauchy nule, este $u(t, x) = \frac{1}{2}x^2t^2$.

6°. O coardă infinită este lovită la momentul inițial în punctul $x = x_0$ în așa mod încît se realizează un impuls I. Să se arate că depărtarea punctelor de pe coardă față de poziția de echilibru, pentru $t > 0$, este dată de funcția $\frac{I}{\rho}\mathscr{E}_t(x - x_0)$, $\mathscr{E}_t(x)$ fiind soluția elementară.

R. Trebuie integrată ecuația

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

în condițiile $u|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{I}{\rho}\delta(x - x_0)$, ρ fiind densitatea coardei considerate presupusă constantă; deci $u(t, x) = \mathscr{E}_t(x) *_1 \frac{I}{\rho}\delta(x - x_0) = \frac{I}{\rho}\mathscr{E}_t(x - x_0)$ deoarece $\langle f(x) *_1 \delta(x - x_0),\ \varphi(x)\rangle = \langle f(y),\ \langle \delta(x - x_0),\ \varphi(x + y)\rangle\rangle = \langle f(y),\ \varphi(y + x_0)\rangle = \langle f(x - x_0), \varphi(x)\rangle$, ceea ce arată că avem $f(x) * \delta(x - x_0) = f(x - x_0)$.

7°. Se dă ecuația

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + Cu = F(t, x).$$

Să se arate că dacă $C = \frac{1}{4}(a^2A^2 - B^2)$, atunci rezolvarea problemei Cauchy $u|_{t=0} = u_0(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)$ se reduce la rezolvarea unei probleme Cauchy pentru ecuația coardei vibrante.

R. Efectuînd schimbarea de variabilă $u(t, x) = v(t, x)\,e^{\frac{a^2}{2}At + \frac{1}{2}Bx}$ se obține ecuația

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(t, x)\,e^{\frac{a^2}{2}At - \frac{1}{2}Bx}$$

care trebuie integrată în condițiile

$$v|_{t=0} = u_0(x)\,e^{-\frac{1}{2}Bx},\quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)\,e^{-\frac{1}{2}Bx} + \frac{a^2}{2}Au_0(x)\,e^{-Bx}$$

3°. În cazul oscilațiilor unei coarde semiinfinite, fixate în origine, trebuie integrată ecuația

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x), \quad t \geqslant 0, \ x \geqslant 0$$

în condițiile $u|_{t=0} = u_0(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)$, $x \geqslant 0$ și $u(t, 0) = 0$. Să se arate că dacă se se prelungesc prin imparitate funcțiile u_0, u_1 și F (față de variabila x) soluția poate fi obținută cu ajutorul formulei lui d'Alembert.

R. Pentru $F = 0$, dacă f și g sînt definiți pe toată axa $f(x) = u_0(x)$, $g(x) = u_1(x)$ pentru $x \geqslant 0$, se obține $u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(y)dy$, de unde, pentru $x = 0$ se obține $0 = \frac{1}{2}[f(at) + f(-at)] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{+at} g(y)\,dy$, și egalitatea se verifică dacă $f(x - x) = -f(x)$, $g(x) = -g(-x)$.

5.2.4. Ecuația undelor sferice. Interpretări fizice

Prin *ecuația undelor sferice* vom înțelege ecuația cu derivate parțiale

$$\Box_3 u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_3 u =$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(t, x, y, z) \qquad (5.33)$$

în care a este o constantă iar F este cunoscută (ca distribuție sau ca funcție). Acestei ecuații se atașează condițiile inițiale (Cauchy)

$$u(t, x, y, z)|_{t=0} = f(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u(t, x, y, z))}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x, y, z), \quad (5.33')$$

f și g fiind date convenabil (funcții sau distribuții din $\mathbb{R}^3$).

După cum știm (vezi 5.26 pentru $m = 1$), soluția elementară a problemei Cauchy (5.33) pentru ecuația în cauză va fi distribuția

$$\mathscr{E}_t(x, y, z) = \frac{1}{2\pi a^2 t}\delta(at - r), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

în care $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ este distribuția lui Dirac unidimensională. Prin egalitatea

$$\langle \delta(at - r), \ \varphi(x, y, z) \rangle = \int_{S_{at}} \varphi(x, y, z)\, d\sigma,$$

în care S_{at} este sfera de rază at cu centrul în origine, $d\sigma$ este elementul de arie pe S_{at} (în coordonate sferice avem $d\sigma = a^2t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$).

În baza egalității (5.26') soluția elementară a operatorului $\Box_3$ va fi dată de

$$\mathscr{E}(t, x, y, z) = \frac{H(t)}{2\pi a^2 t}\delta(at - r),$$

H fiind funcția unitate cu o singură dimensiune.

Utilizînd teoria generală, dacă f și g vor fi distribuții cu suport compact din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ și dacă supp $F \subset [0, +\infty[\times \vec{G}_3$, $\vec{G}_3$ fiind un compact din $\mathbb{R}^3$, soluția ecuației (5.33) care verifică (5.33') va fi

$$u(t, x, y, z) = \mathscr{E}_t(x, y, z) *_1 g_1(x, y, z) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_t(x, y, z) *_1 f(x, y, z) + \mathscr{E}(t, x, y, z) * F(t, x, y, z),$$

unde $*$ înseamnă operația de convoluție în spațiul variabilelor (t, x, y, z) iar $*_1$ este operația de convoluție în spațiul variabilelor (x, y, z). Prin particularizare în (5.29) (dar cu at în loc de t) găsim

$$u_0(t, x, y, z) = tM_{at}[g] + \frac{\partial}{\partial t}(tM_{at}[f]). \qquad (5.34)$$

Vom trece la interpretarea fizică a formulei (5.34) care poartă numele de *formula lui Poisson* pentru ecuația undelor sferice. În cazul ecuației $\Box_3 u = 0$ soluția este dată de integrale calculate pe *suprafața sferei* de rază at cu centrul în punctul în care se calculează soluția. Vom presupune că funcțiile inițiale f și g sînt nule în afara domeniului $D_3 \subset \mathbb{R}^3$, deci supp $f \subset D_3$, supp $g \subset D_3$ (D_3 fiind presupus mărginit).

Fie r_M și r_m distanța maximă, respectiv minimă de la punctul (x_0, y_0, z_0) la domeniul D_3; deoarece $S_{at} \cap D_3 = \emptyset$ dacă $at \notin [r_m, r_M]$, rezultă că vom avea $u = 0$, dacă (fig. 5.3) $at < r_m$ sau $at > r_M$.

În schimb vom avea $u \neq 0$ dacă $r_m < at < r_M$ (deoarece $S_{at} \cap$ $\cap D_3$ nu este o mulțime vidă din $\mathbb{R}^3$ și deci pe această intersecție avem $f \neq 0$, $g \neq 0$, ceea ce va antrena evident $M_{at}[f] \neq 0$, $M_{at}[g] \neq 0$).

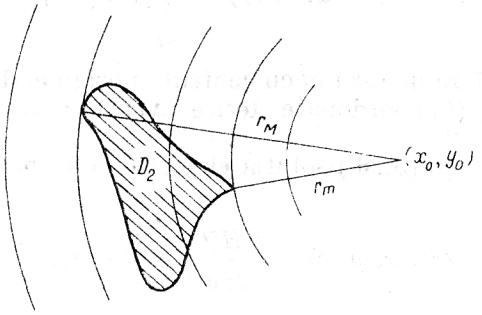

Fig. 5.3.

Prin urmare, dacă $(x_0, y_0, z_0) \notin D_3$, în acest punct, în intervalul de timp $0 < t < \frac{r_m}{a}$ nu sînt vibrații; apare apoi un fenomen de vibrație în acest punct, în intervalul de timp $\frac{r_m}{a} < t < \frac{r_M}{a}$, care apoi încetează definitiv $\left(u = 0, \text{ pentru } t > \frac{r_M}{a}\right)$.

În acest mod se pot pune în evidență două fronturi de undă create de perturbația inițială localizată în D_3: un front anterior și altul posterior care sînt decalate prin diferența de timp $\frac{r_M}{a} - \frac{r_m}{a}$ și care trec succesiv prin toate punctele din $\mathbb{R}^3$ care nu aparțin lui D_3. Se constată deci că vibrațiile se propagă cu viteza a și că undele produse de vibrații localizate în spațiu sînt localizate și în timp. Dacă se consideră totalitatea punctelor în care a ajuns la momentul t vibrația localizată într-un punct P, acestea vor fi situate pe o sferă S_{at} cu centrul în P iar dacă P variază în D_3, va trebui să considerăm înfășurătoarele familiei de sfere cu centrul în P; se obțin astfel cele două fronturi de undă anterior și posterior; avem de-a face cu un caz particular al *principiului lui Huygens* (care este valabil și la ecuația coardei vibrante).

Un caz practic, care corespunde fenomenului descris este acela al undelor sonore: un sunet scurt, produs la o anumită distanță produce un efect scurt asupra urechii.

Exerciții

1°. Fie ecuația undelor sferice

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

și problema Cauchy $u(t, x, y, z)|_{t=0} = u_0(x, y, z)$, $\left.\frac{\partial u(t, x, y, z)}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x, y, z)$. Să se arate că dacă u_0 și u_1 sînt funcții armonice (adică $\Delta_3 u_0 = 0$, $\Delta_3 u_1 = 0$), atunci soluția va fi $u(t, x, y, z) = u_0(x, y, z) + t\, u_1(x, y, z)$.

R. Se verifică imediat condițiile inițiale; apoi avem $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ iar $\Delta_3(u_0 + t\, u_1) = \Delta_3 u_0 + t\, \Delta_3 u_1 = 0$, deci $\Delta_3 u = 0$.

2°. Să se arate că soluția particulară a ecuației $\square_3 u = F(t, x, y, z)$ care verifică date Cauchy nule se poate obține și cu ajutorul principiului lui Duhamel, din soluția ecuației omogene.

R. Avem $u_p(t, x, y, z) = \int_0^t v(t - s, s, x, y, z)\, ds$, unde $v(t, s, x, y, z)$ verifică ecuația $\square_3 v = 0$ în raport cu variabilele t, x, y și z pentru orice $s \geqslant 0$ și condițiile Cauchy $v|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = a^2 F(s, x, y, z)$.

3°. Să se arate că dacă $\Delta_3 F(x, y, z) = 0$, atunci soluția ecuației $\square_3 u = F$ care verifică date Cauchy nule va fi $u_p(t, x, y, z) = \frac{a^2}{2} t^2 F(x, y, z)$.

4°. Să se găsească soluția particulară a ecuației

$$\square_3 u = f(t)\, F_1(x, y, z)$$

care verifică date Cauchy nule dacă $\Delta_3 F_1 = 0$.

R. Căutînd o soluție de forma $u_p(t, x, y, z) = g(t)\, F(x, y, z)$ rezultă $\Delta_3 u_p = g(t)\ \Delta_3 F = 0$ și pentru a se verifica ecuația $\square_3 u = 0$, mai trebuie să avem $\frac{1}{a^2} g'' = f$ iar din condițiile inițiale $g(0) = g'(0) = 0$; prin urmare, vom avea $g(t) = a^2 \int_0^t dt \int_0^t f(s) ds =$ $= a^2 \int_0^t (t - s)\, f(s)\, ds$ ceea ce conduce la soluția căutată $u_p(t, x, y, z) = a^2 F_1(x, y, z) \int_0^t (t - s)\, f(s)\, ds$.

5°. Să se arate că soluția ecuației

$$\square_3 u = f(t)\, F(x, y, z)$$

care verifică datele Cauchy $u|_{t=0} = u_0(x, y, z)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x, y, z)$ este dată de

$$u(t, x, y, z) = u_0(x, y, z) + tu_1(x, y, z) + \frac{a^2}{2} F\int_0^t (t - s) f(s)\, ds,$$

dacă $\Delta_3 u_0 = 0$, $\Delta_3 u_1 = 0$, $\Delta_3 F = 0$.

R. Se utilizează exercițiile 1 și 3.

6°. Se cer soluțiile de forma $u(t, x, y, z) = v(t, r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (adică soluțiile cu simetrie sferică) ale ecuației $\square_3 u = 0$.

R. Prin calcul, se obține $\Delta_3 u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$ și deci $\square_3 u = 0$ va însemna $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0$, adică $\frac{1}{a^2} r \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0$, deci, deoarece $r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r.\ v)$, $r\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r)$, avem ecuația $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rv) - \frac{\partial}{\partial r^2}(rv) = 0$ care este ecuația coardei vinrante și deci $rv = f(r + at) + g(r - at)$. Așadar $u(t, x, y, z) = \frac{1}{r}[f(r + at) + g(r - at)]$ și această soluție va fi definită în orice domeniu în care $r \neq 0$. Dacă în discuție apare și originea, atunci trebuie luat $g(s) = -f(s)$, pentru ca și numărătorul să se anuleze și atunci, conform cu regula lui l'Hospital, vom avea $u(t, 0) = f'(at) - f'(-at)$.

7°. Să se arate că soluția ecuației $\square_3 u = 0$ care verifică datele Cauchy $u|_{t=0} = u_0(r)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(r)$ se scrie sub forma

$$u(r, t) = \frac{(r - at)\, u_0(r - at) + (r + at)\, u_0(r + at)}{2r} + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at} s u_1(s)\, ds,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

R. Se utilizează exercițiul 6.

8°. Să se arate că soluția ecuației $\square_3 u = F(t, r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ care verifică date Cauchy nule se scrie sub forma

$$u(t, x, y, z) = \frac{a}{2r}\int_0^t ds \int_{r-a(t-s)}^{r+a(t-s)} \xi F(s, \xi)\, d\xi.$$

R. Se aplică exercițiile 2 și 7.

9°. Să se găsească soluția ecuației $\square_3 u = 0$ care verifică datele inițiale

a) $u|_{t=0} = u_0 = \begin{cases} \text{const}, & \text{dacă } r < r_0, \\ 0, & \text{dacă } r > r_0, \end{cases}$ $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$;

b) $u|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1 = \begin{cases} \text{const}, & \text{dacă } r < r_0, \\ 0, & \text{dacă } r > r_0, \end{cases}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

R.

a) $u(t, r) = \begin{cases} u_0, & \text{dacă } 0 \leqslant t < \frac{r_0 - r}{a}, \\ u_0\frac{r - at}{2r}, & \text{dacă } \frac{r_0 - r}{a} < t < \frac{r + r_0}{a}, \quad 0 < r < r_0; \\ 0, & \text{dacă } \frac{r + r_0}{a} < t < +\infty, \end{cases}$

$$u(t, r) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{r - r_0}{a}, \\ u_0\frac{r - at}{2r}, & \frac{r - r_0}{a} < t < \frac{r - r_0}{a}, \quad r_0 < r < \infty; \\ 0, & \frac{r + r_0}{a} < t < \infty, \end{cases}$$

b) $u(t, r) = \begin{cases} u_1 t, & \text{dacă } 0 \leqslant t < \frac{r_0 - r}{a}, \\ u_1\frac{r_0^2 - (r - at)^2}{4ar}, & \text{dacă } \frac{r_0 - r}{a} < t < \frac{r + r_0}{a}, \quad 0 < r < r_0; \\ 0, & \text{dacă } \frac{r + r_0}{a} < t < +\infty, \end{cases}$

$$u(t, r) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{r - r_0}{a}, \\ u_1\frac{r_0^2 - (r - at)^2}{4ar}, & \frac{r_0 - r}{a} < t < \frac{r_0 + r}{a}, \quad r_0 < r < \infty. \\ 0, & \frac{r_0 + r}{a} < t < \infty, \end{cases}$$

5.2.5. Ecuația undelor cilindrice. Interpretări fizice

Vom obține acum, utilizînd metoda de coborîre (vezi 5.2.2), soluția problemei Cauchy restrînse

$$u(t, x, y)|_{t=0} = f(x, y), \quad \left.\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x, y) \tag{5.35}$$

pentru ecuația undelor cilindrice

$$\square_2 u = F(t, x, y), \qquad \square_2 = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

În baza metodei de coborîre, vom presupune că soluția căutată este soluția problemei Cauchy (5.35) dar atașată ecuației

$$\square_3 u = F(t, x, y);$$

deoarece această soluție se poate obține doar cu ajutorul termenului

$$u_0(t, x, y) = tM_{at}[g],$$

vom lua în considerare doar această funcție. Deoarece

$$u_g(t, x, y) = \frac{t}{2\pi a^2 t^2}\iint\limits_{S_{at}} g(\xi, \eta)\, \mathrm{d}\sigma,$$

unde S_{at} este suprafața sferei de rază at centrată în punctul (x, y, z), scriind $S_{at} = S_{at}^{(1)} \cup S_{at}^{(2)}$, unde $S_{at}^{(1)}$ este emisfera superioară (în raport cu axa $O\zeta$) iar $S_{at}^{(2)}$ este emisfera inferioară a sferei în cauză, avem

$$u_g(t, x, y) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}^{(1)}} g(\xi, \eta)\, \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}^{(2)}} g(\xi, \eta)\, \mathrm{d}\sigma.$$

Cum $\mathrm{d}\sigma = \dfrac{at\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}$ atît pe $S_{at}^{(1)}$ cît și pe $S_{at}^{(2)}$, se deduce

$$u_g(t, x, y) = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}} \frac{g(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$

unde C_{at} este proiecția lui $S_{at}^{(1)}$ (sau proiecția lui $S_{at}^{(2)}$) în planul $\xi O \eta$ [care are originea în punctul $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$]; deci

$$C_{at}: (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \leqslant a^2t^2.$$

Prin urmare, înlocuind în (5.34), se obține soluția problemei Cauchy (5.35) pentru ecuația $\square_2 u = 0$:

$$u_0(t, x, y) = u_g(t, x, y) + \frac{\partial}{\partial t} u_f(t, x, y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}} \frac{g(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{C_{at}} \frac{f(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}$$

Este ușor de verificat că soluția u_p a ecuației $\square_2 u = F$ care verifică date Cauchy nule se scrie

$$u_p(t, x, y) = \frac{a}{2\pi}\int\limits_0^t \mathrm{d}s \iint\limits_{C_{a(t-s)}} \frac{F(s, \xi, \eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$

La aceleași rezultate se poate ajunge cu ajutorul soluției elementare a problemei Cauchy pentru ecuația

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \tag{5.36}$$

vom arăta că aceasta este dată de funcția discontinuă

$$\mathscr{E}_t(x, y) = \frac{H(a^2t^2 - x^2 - y^2)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - x^2y^2}} & \text{pentru } x^2 + y^2 \leqslant a^2t^2, \\ 0 & \text{pentru } x^2 + y^2 > a^2t^2. \end{cases} \tag{5.37}$$

Aplicînd transformarea Fourier în raport cu variabilele spaţiale x şi y ecuaţiei (5.36), se obţine ecuaţia diferenţială

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \hat{\mathscr{E}}_t}{\partial t^2} + (\xi^2 + \eta^2)\,\hat{\mathscr{E}}_t = 0, \quad \hat{\mathscr{E}}_t = \hat{\mathscr{E}}_t(\xi, \eta), \qquad (5.36')$$

$\hat{\mathscr{E}}_t(\xi, \eta) = \mathscr{F}_{x,y}[\mathscr{E}_t(x, y)]$; deoarece trebuie să avem

$$\mathscr{E}_t(x, y)|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \mathscr{E}_t(x, y)}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(x, y),$$

rezultă că ecuaţia (5.36') trebuie integrată în condiţiile iniţiale

$$\hat{\mathscr{E}}_t|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \hat{\mathscr{E}}_t}{\partial t}\right|_{t=0} = 1.$$

Singura soluţie a ecuaţiei (5.36') care verifică aceste condiţii este funcţia

$$\hat{\mathscr{E}}_t(\xi, \eta) = \frac{1}{a}\sin(a\rho t), \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

şi deci, aplicînd transformarea Fourier inversă, găsim

$$\mathscr{E}_t(x, y) = \mathscr{F}^{-1}_{\xi,\eta}\left[\frac{1}{a\rho}\sin(a\rho t)\right] = \frac{1}{4\pi^2 a}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\rho}\sin(a\rho t)\,e^{-i(x\xi+y\eta)}\,d\xi\,d\eta.$$

Scriind variabilele (x, y) şi (ξ, η) în coordonate polare,

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \xi = \rho\cos\varphi, \eta = \rho\sin\varphi$$

găsim

$$\mathscr{E}_t(x, y) = \frac{1}{4\pi^2 a}\int_0^\infty \sin(a\rho t)\,d\rho \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\int_0^\infty J_0(r\rho)\,\sin(a\rho t)\,d\rho, \qquad (5.38)$$

deoarece

$$\int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi = 2\pi J_0(\rho r),$$

J_0 fiind funcţia Bessel de speţa întîi (vezi cap. 13, vol. I). De fapt, avem

$$\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi}\,d\varphi = 2\pi J_0(x),$$

dar ţinînd seama că funcţia cosinus este periodică cu perioada 2π, avem

$$\int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos\varphi}\,d\varphi,$$

θ fiind constant în prima integrală.

Pentru a calcula $\int_0^\infty J_0(r\rho)\,\sin(a\rho t)\,d\rho$ vom utiliza integrala $\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\,dx$; scriind dezvoltarea în serie a funcţiei J_0, rezultă

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\,dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k b^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\int_0^\infty e^{-ax}x^{2k}\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\,b^{2k}}{2^{2k}(k!)^2\,a^{2k+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^{2k}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k \Gamma(2k+1) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(2k)!}{a\cdot 2^{2k}(k!)^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ultima egalitate obținîndu-se dezvoltînd în serie de puteri funcția $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ și scriind $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Cu acest rezultat, se poate scrie în continuare:

$$\int_0^\infty J_0(bx)\,e^{i\alpha x}\,dx=(b^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=\int_0^\infty J_0(bx)\cos(\alpha x)\,dx+i\int_0^\infty J_0(bx)\sin(\alpha x)\,dx$$

iar prin separarea părților reale și imaginare se obțin egalitățile

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty J_0(bx)\cos(\alpha x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{b^2-\alpha^2}}\\&\int_0^\infty J_0(bx)\sin(\alpha x)\,dx=0\end{aligned}\right\}\ \text{dacă } b^2-\alpha^2>0,$$

și

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty J_0(bx)\cos(\alpha x)\,dx=0\\&\int_0^\infty J_0(bx)\sin(\alpha x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-b^2}}\end{aligned}\right\}\ \text{dacă } \alpha^2-b^2>0.$$

Punînd $at=\alpha$ și $b=r=\sqrt{x^2+y^2}$, se va obține evident soluția elementară (5.37).

Soluția elementară a operatorului $\square_2$ va fi

$$\mathscr{E}(t,x,y)=\frac{H(t)\,H(a^2t^2-x^2-y^2)}{2a\pi\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}},\qquad(5.39)$$

adică

$$\mathscr{E}(t,x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\pi\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}} & \text{pentru } t>0,\ x^2+y^2<a^2t^2,\\ 0 & \text{pentru } t<0,\ x^2+y^2>a^2t^2.\end{cases}\qquad(5.40)$$

Conform cu teoria generală, soluția ecuației $\square_2 u=F$ care verifică datele Cauchy

$$u(t,x,y)|_{t=0}=f(x,y),\qquad \left.\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t}\right|_{t-0}=g(x,y)$$

se va scrie sub forma

$$u(t,x,y)=\mathscr{E}_t(x,y)*_1 g(x,y)]+\frac{\partial}{\partial t}\,[\mathscr{E}_t(x,y)*_1 f(x,y)]+$$

$$+\,\mathscr{E}(t,x,y)*[F(t,x,y)\cdot a^2],$$

dacă f și g sînt distribuții cu suport compact din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ iar suportul lui F este compact în raport cu x și y și inclus în $[0,+\infty[$ în raport cu t. Dacă f, g și F sînt distribuții regulate, vom putea scrie

$$\mathscr{E}_t(x,y)*_1 g(x,y)=\iint_{\mathbb{R}^2}\mathscr{E}_t(\xi,\eta)\,g(x-\xi,y-\eta)\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\iint_{\xi^2+\eta^2<a^2t^2}\frac{g(x-\xi,y-\eta)}{\sqrt{a^2t^2-\xi^2-\eta^2}}\,d\xi\,d\eta$$

sau, efectuînd schimbarea de variabile $x-\xi=\alpha$, $y-\eta=\beta$, găsim

$$\mathscr{E}_t(x,y)*_1 g\,(x,y)=\frac{1}{2\pi a}\iint_{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2\leqslant a^2t^2}\frac{g(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}.$$

În mod analog se obține

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathscr{E}_t(x,y)*_1 f\,(x,y)]=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2\leqslant a^2t^2}\frac{f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}.$$

$$\mathscr{E}(t,x,y)*F(t,x,y)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t ds\iint_{\xi^2+\eta^2<a^2t^2}\frac{a^2F(t-s,\,x-\xi,\,y-\eta)}{\sqrt{a^2s^2-\xi^2-\eta^2}}\,d\xi\,d\eta.$$

În ultima relație, dacă se efectuează schimbările liniare de variabile $t-s\to s$, $x-\xi\to\xi$, $y-\eta\to\eta$, se obține

$$\mathscr{E}(t,x,y)*F(t,x,y)=\frac{a}{2\pi}\int_0^t ds\iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2<a^2(t-s)^2}\frac{F(s,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2(t-s)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}.$$

Prin urmare, soluția căutată, în aceste ipoteze, se scrie sub forma

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{(\xi-x)^2+(\xi-y)^2<a^2t^2} \frac{g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2<a^2t^2} \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} +$$

$$+ \frac{a}{2\pi} \int_0^t ds \iint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant a^2(t-s)^2} \frac{F(s, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2(t-s)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}.$$

Separînd din această formulă contribuția datorată datelor inițiale f și g

$$u_0(t, x, y) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2<a^2t^2} \frac{g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2<a^2t^2} \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \qquad (5.41)$$

se obține așa-numita *formulă a lui Poisson pentru ecuația undelor cilindrice*; trecînd la coordonate polare $\xi = x + r\cos\varphi$, $\eta = y + r\sin\varphi$, deoarece în (5.41) domeniul de integrare este interiorul cercului de rază at cu centrul în punctul $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, rezultă $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant at$ și se va obține

$$u_0(t, x, y) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{at} \frac{g(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\, r\, dr +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{at} \frac{f(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\, r\, dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \int_0^{at} \frac{r\, dr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}} \int_0^{2\pi} g(x+r\cos\varphi, y+r\sin\varphi)\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \frac{r\, dr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}} \int_0^{2\pi} f(x+t\cos\varphi, y+r\sin\varphi)\, d\varphi. \qquad (5.41')$$

Cu ajutorul mediei sferice bidimensionale se găsește

$$u_0(t, x, y) = \frac{1}{a} \int_0^{at} \frac{r\, M_r[g]}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\, dr + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \frac{r\, M_r[f]}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\, dr.$$

Pentru a obține o interpretare fizică a soluțiilor reprezentate prin formula lui Poisson (5.41), vom presupune datele inițiale diferite de zero doar într-un domeniu $D_2 \subset \mathbb{R}^2$. Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; soluția în acest punct, la momentul $t > 0$ va fi

$$u(t, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{C_{at}} \frac{g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x_0)^2-(\eta-y_0)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{C_{at}} \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x_0)^2-(\eta-y_0)^2}} \qquad (5.42)$$

unde domeniul de integrare C_{at} este, după cum s-a precizat anterior, interiorul cercului de rază at cu centrul în punctul (x_0, y_0). Pe fig. 5.4 se observă că dacă t crește, cercurile C_{at} își măresc raza și apar trei situații distincte:

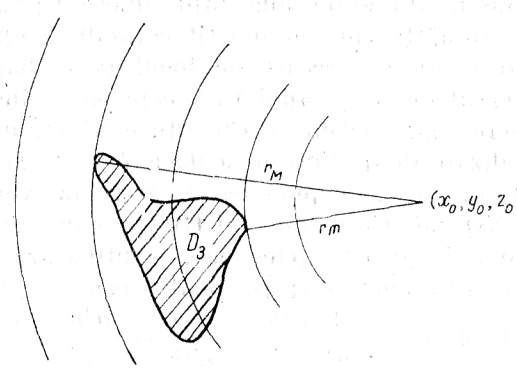

Fig. 5.4.

I. Dacă $at < r_m$, unde r_m este distanța minimă de la punctul (x_0, y_0) la domeniul D_2, atunci $D_2 \cap C_{at} = \emptyset$ și deci, deoarece $f = 0$ și $g = 0$ în C_{at}, vom avea $u(t, x_0, y_0) = 0$.

II. Dacă $r_m < at < r_M$, unde r_M este distanța maximă de la punctul (x_0, y_0) la domeniul D_2, atunci $D_2 \cap C_{at} \neq \emptyset$ și deci în domeniul de integrare din (5.42) avem sigur $f \neq 0$ și $g \neq 0$, ceea ce face ca pentru aceste valori ale lui t să avem $u(t, x_0, y_0) \neq 0$.

II. Dacă $at > r_M$, avem $D_2 \cap C_{vt} = D_2$ şi deci $u(t, x_0, y_0) \neq 0$; formula (5.42) devine

$$u(t, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{D_2} \frac{g(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x_0)^2 - (\eta - y_0)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{D_2} \frac{f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x_0)^2 - (\eta - y_0)^2}} \neq 0$$

deci domeniul de integrare este acelaşi oricare ar fi $t\left(> \frac{r_M}{a}\right)$; se observă că vom avea $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t, x_0, y_0) = 0$.

Aşadar, aici situaţia este alta decît cea obţinută la interpretarea fizică a soluţiilor ecuaţiei coardei vibrante şi a ecuaţiei undelor sferice, cînd un punct exterior domeniului de perturbare iniţială oscila numai un interval finit de timp; acum, în punctul $(x_0, y_0) \notin C_2$, D_2 fiind domeniul de perturbare iniţială, un interval de timp nu avem perturbaţie (pentru $t < r_m/a$), apoi acest punct începe să vibreze, nerevenind în poziţie de repaus niciodată, oscilaţiile fiind din ce în ce mai mici. Se constată că în acest caz avem doar un front anterior net, în urma undei rămînînd o coadă (fapt cunoscut practic la undele de apă : dacă pe suprafaţa unul lac liniştit se produce o perturbaţie, un punct situat la o distanţă oarecare de locul perturbaţiei va sta în nemişcare un interval de timp, apoi va începe să oscileze, amplitudinea oscilaţiei descrescînd continuu). Cu alte cuvinte, influenţa unor date iniţiale localizate în spaţiu (adică dacă D_2 este mărginit) nu mai este localizată în timp : se spune că în acest caz avem de-a face cu o *propagare cu dispersie* (principiul lui Huygens nu mai este valabil). Acest lucru este mai uşor de înţeles, dacă se utilizează forma (5.35) a soluţiei problemei Cauchy restrînse pentru ecuaţia $\square_2 u = 0$: în cazul ecuaţiei undelor sferice $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ soluţia problemei Cauchy se exprimă prin formule de aceeaşi formă cu acele care apar în formula lui Poisson cu singura diferenţă că în loc de cercul C_{at} apare sfera S_{at} de rază at cu centrul în punctul $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ în care ne interesează soluţia. Or orice soluţie a ecuaţiei undelor cilindrice va verifica şi ecuaţia undelor sferice iar punctul (x_0, y_0) considerat anterior va putea fi considerat ca punct din $\mathbb{R}^3$, punînd $z_0 = 0$. Interpretînd ecuaţia $\square_2 u = 0$ ca o ecuaţie care descrie unde cilindrice, datele iniţiale vor fi localizate într-un cilindru infinit, intersecţia căruia cu planul $z = 0$ fiind chiar domeniul D_2. Orice sferă cu raza $at > r_m$ cu centrul în $(x_0, y_0, 0)$ va intersecta cilindrul şi din acest motiv va apărea coada undei [prin unde cilindrice se înţeleg acele fenomene de propagare care au loc independent de una din coordonate; soluţia (5.41) fiind independentă de z, vom obţine deci, raportat la fenomenele de propagare din $\mathbb{R}^3$, unde cilindrice] (vezi fig. 5.5).

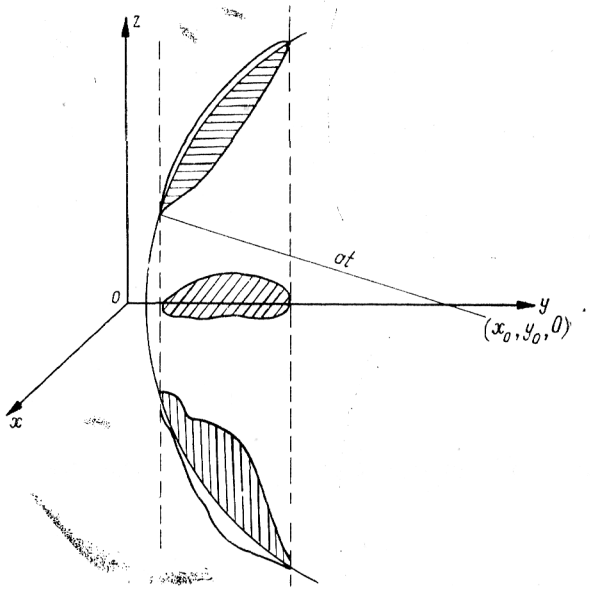

Fig. 5.5.

5.2.6. Problema Cauchy restrînsă pentru ecuaţii de tip hiperbolic normal cu coeficienţi constanţi

În cap. 1 s-a văzut că orice ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi

$$\sum_{j,k=0}^{n} a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=0}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = G(\mathbf{x}), \quad a_{jk}, b_j, c \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \tag{5.43}$$

se poate scrie sub forma

$$\square_n u + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 \frac{\partial u}{\partial t} + au = F(t, \mathbf{x}), \; a_j, a, a_0 \in \mathbb{R}$$

dacă ecuaţia (5.43) este de tip hiperbolic normal, adică dacă forma pătratică $\sum_{j,k=0}^{n} a_{jk}\xi_j\xi_k$ are signatura $(1, n)$; prin transformarea

$$u \to \exp\left(-\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) u$$

se obine ecuaţia mai simplă

$$\Box_n u - bu = F_1, \tag{5.44}$$

cu

$$\Box_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n,\ b = \frac{1}{4}a_0^2 - a - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} a_j^2;$$

$$F_1 = F \exp\left(\frac{1}{2}a_0 t - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right).$$

Ataşînd ecuaţiei (5.44) problema Cauchy restrînsă

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_{t=0} = f(\mathbf{x}),\ \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(\mathbf{x}), \tag{5.45}$$

este suficient să găsim soluţia ecuaţiei omogene

$$\Box_n u - bu = 0 \tag{5.44'}$$

care verifică datele Cauchy

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_{t=0} = f(\mathbf{x}),\ \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{5.45'}$$

pentru ca să reuşim să găsim soluţia ecuaţiei (5.44) care verifică datele iniţiale (5.45). Într-adevăr, notînd cu $u_f(t, \mathbf{x})$ soluţia ecuaţiei (5.44') care verifică (5.45'),

$$u_0(t, \mathbf{x}) = \int_0^t u_g(s\ \mathbf{x})\ ds$$

va verifica ecuaţia (5.44') [deoarece

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = u_g,\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial u_g}{\partial t} =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial^2 u_g(s, \mathbf{x})}{\partial s^2}\, ds,$$

iar

$$\Delta_n u_0 = \int_0^t \Delta_n u_g ds \text{ şi } (\Box_n - b_0)\, u = \int_0^t (\Box_n - b_0)\, u_g\, ds = 0\Big]$$

şi condiţiile iniţiale

$$u_0\Big|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial u_0}{\partial t}\Big|_{t=0} = g \text{ iar } u_f(t, \mathbf{x}) + \int_0^t u_g(s, \mathbf{x})\ ds$$

va verifica ecuaţia (5.44') şi condiţiile (5.45). În plus, principiul lui Duhamel arată că funcţia

$$u_p(t, \mathbf{x}) = \int_0^t u_{F_1(s,\ \mathbf{x})}(t - s, s, \mathbf{x})\, ds$$

va verifica ecuaţia (5.44) şi condiţiile iniţiale (5.45) nule ($f = 0, g = 0$).

Pentru a-l determina pe u_f, se multiplică ecuaţia (5.44') prin $\exp(\sqrt{b}x_{n+1})$, x_{n+1} fiind o nouă variabilă independentă; deoarece

$$bu(t, x_1, \ldots, x_n)e^{\sqrt{b}\,x_{n+1}} = \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}\left(ue^{\sqrt{b}\,x_{n+1}}\right),$$

se obţine ecuaţia

$$\Box_{n+1} w = 0,\ \Box_{n+1} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{n+1},\ w = u \exp(\sqrt{b}\ x_{n+1})$$

care trebuie integrată în condiţiile iniţiale

$$w(t, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\Big|_{t=0} = f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

deduse direct din (5.45'). Această soluţie se obţine imediat din consideraţiile din 5.2.1 şi 5.2.2; astfel, dacă n este par, $n+1$ va fi impar iar soluţia va fi

$$w(t, \mathbf{x}, x_{n+1}) = \frac{\sqrt{\pi}\, t}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n}{2}} (t^{n-1} M_t[f(\mathbf{x})\, e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}]) \quad (5.46)$$

iar dacă n este impar, se aplică metoda de coborîre, obţinîndu-se

$$w(t, \mathbf{x}, x_{n+1}) = \frac{2t}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int_0^t \frac{[r^n M_r[f(\mathbf{x})\, e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}]}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dr. \quad (5.46')$$

Trebuie calculată media sferică din $\mathbb{R}^{n+1}$ a unor funcţii de forma $f(\mathbf{x})\ \exp\ (\sqrt{b}x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}$ pentru a pune în evidenţă variabila x_{n+1}; dar

$$M_r[f(\mathbf{x})\ e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}] = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int_{\|\mathbf{y}\|=1} f(\mathbf{x} + r\mathbf{y}')\, e^{\sqrt{b}(x_{n+1} + r y_{n+1})} d\omega_{n+1} =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}}{\omega_{n+1} r^n} \int_{\|\mathbf{z}\|=r} f(\mathbf{x} + \mathbf{z}')\, e^{\sqrt{b}\, z_{n+1}}\, d\sigma_{n+1}$$

cu $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) = (\mathbf{y}', y_{n+1})$, $z = ry$. Deoarece

$$d\sigma_{n+1} = \frac{r\, d\mathbf{z}'}{\sqrt{r^2 - \|\mathbf{z}'\|^2}}, \quad \mathbf{z}' = r\mathbf{y}'$$

şi cum proiecţia suprafeţei sferei $\|\mathbf{z}\| = r$ în spaţiul $z_{n+1} = 0$ este interiorul sferei $\|\mathbf{z}'\| = r$ (dar de două ori : o dată cînd se ia în consideraţie emisfera superioară şi apoi emisfera inferioară), rezultă (cu $z_{n+1} = \sqrt{r^2 - \|\mathbf{z}'\|^2}$ pentru emisfera superioară $z_{n+1} = -\sqrt{r^2 - \|\mathbf{z}'\|^2}$ pentru emisfera inferioară) :

$$M_r[f(\mathbf{x})\, e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}] = \frac{e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}}{\omega_{n+1} r^{n-1}} \int_{\|\mathbf{z}'\| < r} \frac{e^{\sqrt{b}\, \sqrt{r^2 - \|\mathbf{z}'\|^2}}}{\sqrt{r^2 - \|\mathbf{z}'\|^2}} f(\mathbf{x} + \mathbf{z}')\, d\mathbf{z}' +$$

$$+ \frac{e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}}{\omega_{n+1} r^{n-1}} \int_{\|\mathbf{z}'\| < r} \frac{e^{-\sqrt{b}\, \sqrt{r^2 - \|\mathbf{z}'\|^2}}}{\sqrt{r^2 - \|\mathbf{z}'\|^2}} f(\mathbf{x} + \mathbf{z}')\, d\mathbf{z}' =$$

$$= \frac{2e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}}{\omega_{n+1} r^{n-1}} \int_{\|\mathbf{z}'\| < r} \frac{\operatorname{ch}\,(\sqrt{b(r^2 - \|\mathbf{z}'\|^2)})}{\sqrt{r^2 - \|\mathbf{z}'\|^2}} f(\mathbf{x} + \mathbf{z}')\, d\mathbf{z}'.$$

Trecînd la sistemul sferic de coordonate din $\mathbb{R}^n$, avem $d\mathbf{z}' = \rho^{n-1} d\rho\, d\omega_n$, $\rho = \|\mathbf{z}'\|$ şi deci

$$M_r[f(\mathbf{x})\, e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}] =$$

$$= \frac{2e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}}{\omega_{n+1} r^{n-1}} \int_{\|\alpha\|=1} d\omega_n \int_0^r \frac{\rho^{n-1} \operatorname{ch}[\sqrt{b(r^2 - \rho^2)}]}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} f(\mathbf{x} + \rho\alpha)\, d\rho =$$

$$= \frac{2\omega_n e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}}{\omega_{n+1} r^{n-1}} \int_0^r \frac{\rho^{n-1} \operatorname{ch}\,[\sqrt{b(r^2 - \rho^2)}\,]}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} M_\rho[f]\, d\rho.$$

Cum $\omega_{n+1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, avem în definitiv

$$M_r[f(\mathbf{x})\ e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}] = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) e^{\sqrt{b}\, x_{n+1}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) r^{n-1}} \times$$

$$\times \int_0^r \frac{\rho^{n-1} \operatorname{ch}\,[\sqrt{b(r^2 - \rho^2)}\,]}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} M_\rho[f]\, d\rho;$$

pentru n par se deduce, din egalitatea $w(t, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x})\, e^{\sqrt{b}x_{n+1}}$ soluția

$$u_f(t, \mathbf{x}) = \frac{2t}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^t \frac{\rho^{n-1} \operatorname{ch}[\sqrt{b(t^2-\rho^2)}]}{\sqrt{t^2-\rho^2}} M_\rho[f]\, d\rho$$

iar pentru n impar rezultă

$$u_f(t, \mathbf{x}) = \frac{4t}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int_0^t \frac{r\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}} \times$$

$$\times \int_0^r \frac{\rho^{n-1} \operatorname{ch}\,[\sqrt{b(r^2-\rho^2)}]}{\sqrt{r^2-\rho^2}} M_\rho[f]\, d\rho.$$

Inversînd ordinea de integrare în ultima egalitate, după schimbarea de variabilă $r \to s$,

$$r^2 = (t^2 - \rho^2)\, s^2 + \rho^2,$$

ținînd seama că în integrala relativă la s integrandul este o funcție pară, se găsește

$$u_f(t, \mathbf{x}) = \frac{2t}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n+2}{2}} \int_0^t \rho^{n-1} M_\rho[f]\, d\rho \times$$

$$\times \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}\,[\sqrt{b}(t^2-\rho^2)\, s]\, ds.$$

în baza egalității

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(xs)\, ds$$

J_0 fiind funcția Bessel de speța întîi, cum $\cos ix = \operatorname{ch} x$, rezultă

$$u_f(t, x) = \frac{4\sqrt{\pi}\,t}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int_0^t \rho^{n-1} J_0[\sqrt{b}(\rho^2 - t^2)]\, M_\rho[f]\, d\rho.$$

Prin urmare, atît în cazul unui număr par de dimensiuni spațiale cît al și unui număr impar de astfel de dimensiuni, u_f se exprimă cu ajutorul unor integrale din media sferică a funcției f.

5.2.7. Stabilitatea soluției ecuației undelor. Principiul lui Huygens

Datorită faptului că s-a obținut soluția ecuației $\square_n u = F$ care verifică datele inițiale

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_{t=0} = f(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(\mathbf{x})$$

sub formă explicită, obținîndu-se legătura dintre f, g și F și u, putem deduce corectitudinea acestei probleme. Soluția există, este unică iar în raport cu convergența din $C^k(\mathbb{R}^n)$, această soluție va fi stabilă. Astfel, dacă

$$f \in B_\delta(f_0) \subset C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \quad g \in B_\delta(g_0) \subset C^{\left[\frac{n}{2}\right]}, \quad F \in B_\delta(F_0) \subset C^{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

[unde $B_\delta(h_0)$ este interiorul sferei de rază δ cu centrul în h_0, C^k este mulțimea funcțiilor de clasă $C^k(\mathbb{R}^n)$ organizat ca spațiu Banach cu ajutorul normei

$$\|h\|_k = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{|h|, |Dh|, \ldots, |D^k h|\}, \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

iar $[x]$ este partea întreagă a numărului real x], atunci se deduce $\|u - u_0\| < \varepsilon$ dacă u este soluția corespunzînd datelor f, g și F iar u_0 soluția aceleiași ecuații dar cu datele f_0, g_0, și F_0. Pentru aceasta este suficient de observat că

$$\|M_r[f] - M_r[f_0]\|_k \leqslant \|f - f_0\|_k, \qquad k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 3$$

(deoarece M_r este un operator liniar iar $\left|\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\|y\|=1}(f-f_0)\,d\omega_n\right| \leqslant$

$\leqslant \|f-f_0\|_k \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\|y\|=1} d\omega_n$) și deci cum

$$u_f(t,\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\pi}\,t}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m (t^{2m-1}M_t[f]) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j t^{2m-j-1}\frac{\partial^{m-j}M_t[f]}{\partial t^{m-j}},\quad m=\left[\frac{n}{2}\right],$$

rezultă $\|u_f - u_{f_0}\|_0 \leqslant A\|f-f_0\|_m < \varepsilon$, dacă $\delta > 0$ este astfel ales încît $A\delta < \varepsilon$. Analog se procedează cu termenii care definesc contribuția celorlalte date ale problemei; de observat că dacă n (numărul de dimensiuni spațiale) crește, atunci pentru ca soluția în discuție să definească o soluție ordinară a ecuației undelor, f, g și F trebuie să fie suficient de regulate: dacă n crește, mulțimea din care se pot alege aceste funcții se restrînge. Dacă f, g și F sînt doar integrabile în $\mathbb{R}^n$, soluțiile corespunzătoare vor fi evident distribuții.

Se spune că *principiul lui Huygens este valabil* pentru soluțiile unei ecuații liniare și omogene cu derivate parțiale în $n+1$ variabile $t, x_1, \ldots, x_n$, dacă soluția problemei Cauchy cu date pe o suprafață $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de tip spațial calculată în punctul $(t_0, \mathbf{x}_0)$ depinde doar de valorile datelor inițiale calculate pe intersecția conului retrograd cu vîrful în $(t_0, \mathbf{x}_0)$ cu S; în acest caz se mai spune că ecuația este cu *undă pură*.

Teorema 5.5. *Principiul lui Huygens este valabil pentru ecuația undelor cu un număr impar de dimensiuni spațiale, nu este valabil pentru ecuația undelor cu un număr par de dimensiuni spațiale și de asemenea nu este valabil pentru orice ecuație de tip hiperbolic normal cu coeficienți constanți, a cărei formă canonică este* $\Box_n u + bu = 0$, $b \neq 0$.

⌜ Vom presupune $f \neq 0$, $g = 0$, $F = 0$; dacă n este impar, soluția problemei Cauchy $u\Big|_{t=0} = f$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$, pentru ecuația $\Box_{2m+1} u = 0$ se scrie

$$u_f(t_0,\mathbf{x}_0) = \frac{t_0\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t_0^2}\right)^{m-1}(t_0^{2m+1}M_{t_0}^{\mathbf{x}_0}[f(\mathbf{x})]).$$

Deoarece media sferică $M_{t_0}^{\mathbf{x}_0}[f]$ se exprimă numai cu ajutorul valorilor lui f calculate pe sfera $B_{t_0}(\mathbf{x}_0)$, se deduce că u_f se exprimă cu ajutorul valorilor lui f și ale derivatelor sale parțiale pînă la ordinul m inclusiv calculate pe această sferă. Deoarece ecuația carteziană a conului caracteristic al ecuației $\Box_n u = 0$ cu vîrful în $(t_0, \mathbf{x}_0)$ se scrie

$$(t-t_0)^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2 = 0,$$

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, intersecția sa cu suprafața S care poartă datele se obține făcînd $t = 0$ (datele Cauchy se află în hiperplanul $t = 0$), rezultînd $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2 = t_0^2$.

Dacă însă $n = 2m$, deoarece

$$u_f(t_0,\mathbf{x}_0) = \frac{2t_0}{\Gamma(m)}\left(\frac{\partial}{\partial t_0^2}\right)^m \int_0^{t_0}\frac{r^{n-1}M_r[f]}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr =$$

$$= \frac{2t_0}{\omega_m\Gamma(m)}\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\right)^m \int\limits_{\|y-x_0\|<t_0}\frac{f(y)\,dy}{\sqrt{t_0^2-\|y-x_0\|^2}},$$

soluția se obține cu ajutorul valorilor lui f și ale derivatelor sale parțiale calculate nu pe sfera $B_{t_0}(\mathbf{x}_0)$ ci în interiorul acestei sfere; în baza calculelor din 5.2.6 același rezultat se găsește și pentru soluțiile u_f ale ecuației $\Box_n u - bu = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots, b \neq 0$. ⌟

Cu ajutorul principiului lui Huygens se poate obține o interpretare fizică a soluțiilor problemei Cauchy. Pentru aceasta, să presupunem F nul și $f(\mathbf{x}) = 0$, $g(\mathbf{x}) = 0$ dacă $\mathbf{x} \notin D_n \subset \mathbb{R}^n$ ($\bar{D}_n$ fiind un compact din $\mathbb{R}^n$). Fie $\mathbf{x}_0 \notin D_n$ și să vedem ce se întîmplă în punctul $(t_0, \mathbf{x}_0)$ pentru diverse valori ale lui t_0; dacă principiul lui Huygens este valabil, soluția problemei Cauchy în punctul considerat se va exprima cu ajutorul valorilor funcțiilor f și g calculate pe sfera $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = t_0$ iar dacă acest principiu nu este valabil vor interveni și valorile din sfera $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < t_0$ (vezi fig. 5.6). Rezultă că dacă princi-

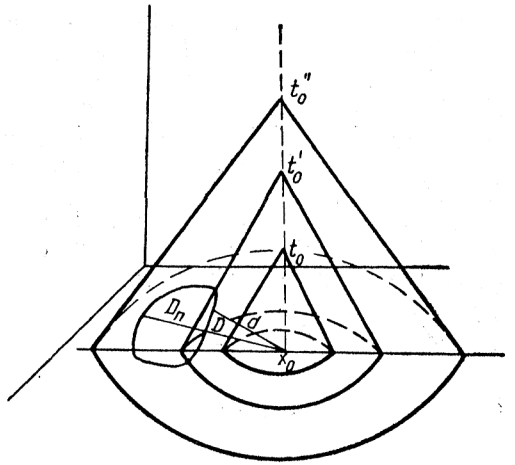

Fig. 5.6

piul lui Huygens este valabil, vom avea $u(t_0, \mathbf{x}_0) = 0$ dacă $t_0 < d$ (d fiind distanța minimă de la $\mathbf{x}_0$ la ∂D_n) și dacă $t_0 > D$(D fiind distanța maximă de la $\mathbf{x}_0$ la ∂D_n), deoarece în aceste situații $\partial B_{t_0}(\mathbf{x}_0) \cap D_n = \emptyset$. În schimb, dacă principiul lui Hyugens nu este valabil, avem $u(t_0, \mathbf{x}_0) = 0$ pentru $t_0 < d$ iar $u(t_0, \mathbf{x}_0) \neq 0$ dacă $t_0 > d_0$ [deoarece $B_{t_0}(\mathbf{x}_0) \cap D_n \neq \emptyset$]. În fig. 5.7 a s-a schițat graficul lui u în raport cu axele t și u în cazul valabilității principiului lui Huygens iar în figura 5.7, b s-a schițat același grafic în cazul în care ecuația nu este cu undă pură;

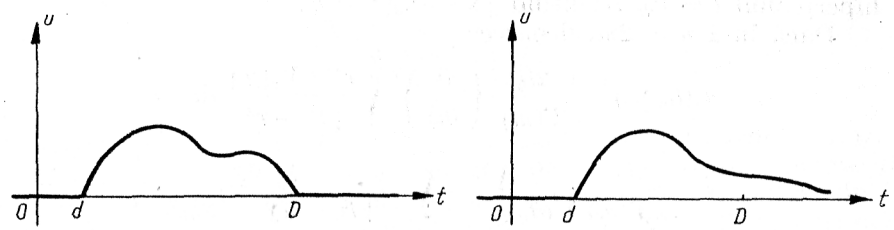

Fig. 5.7

acest din urmă caz se caracterizează prin apariția unei *cozi* și se spune că în această situație undele *difuzează* (să se compare cu rezultatele din 5.2.3—5.2.5).

Rezultatele obținute permit determinarea domeniului de dependență a soluției unei ecuații cu derivate parțiale, înțelegînd prin domeniu de dependență a soluției $u = u(t, \mathbf{x})$ în punctul $(t_0, \mathbf{x}_0)$ acea mulțime de puncte din $\mathbb{R}^n$(= spațiul variabilelor $\mathbf{x}$) în care valorile funcțiilor f și g determină în mod unic soluția în punctul $(t_0, \mathbf{x}_0)$. Din fig. 5.6 se deduce că valoarea $u(t_0, \mathbf{x}_0)$ se determină numai cu ajutorul valorilor lui f și g din interiorul sferei $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = t_0$, valorile acestor funcții din afara acestei sfere neintervenind în calculul soluției în punctul $(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Rezultă imediat că suprafața conului caracteristic constituie *suprafață de discontinuitate* pentru soluțiile ecuațiilor în discuție, adică două soluții distincte se pot racorda numai pe o suprafață făcînd parte din familia de suprafețe $(t - t_0)^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 = 0$ cu $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Într-adevăr, fie u_1, u_2, f_1 și f_2 astfel încît

$$\square_n u_1 = 0,\ u_1\Big|_{t=0} = f_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$

$$\square_n u_2 = 0,\ u_2\Big|_{t=0} = f_2,\ \frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$

iar $f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$ dacă $\mathbf{x} \in B_{t_0}(\mathbf{x}_0)$, $f_1(\mathbf{x}) \neq f_2(\mathbf{x})$ dacă $\mathbf{x} \notin B_{r_0}(\mathbf{x}_0)$; evident $u_1(t, \mathbf{x}) = u_2(t, \mathbf{x})$ dacă $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ și $(t - t_0)^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 > 0$ iar $u_2(t, \mathbf{x}) \neq u_2(t, \mathbf{x})$ dacă $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ și $(t - t_0)^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2 < 0$ [deoarece în interiorul conului retrograd $(t - t_0)^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ soluțiile u_1 și u_2 sînt determinate numai cu valorile lui f din sfera $B_{t_0}(\mathbf{x}_0)$ în care $f_1 = f_2$] și deci u_1 și u_2 nu vor putea fi diferite decît în afara pînzei considerate (vom avea $u_1 = u_2$ în interiorul conului retrograd pentru $t > 0$, în baza teoremei de unicitate a soluției problemei Cauchy pentru ecuația undelor).

5.3. Metoda lui Riemann

5.3.1. Deducerea formulei lui Riemann

Metoda lui Riemann se referă la rezolvarea problemei Cauchy generale

$$u(x, y)\Big|_\gamma = f,\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial l}\Big|_\gamma = g \tag{5.47}$$

pentru *ecuațiile liniare de tip hiperbolic cu două variabile independente.* După cum este cunoscut (vezi 1.5.4), acest tip de ecuații poate fi întotdeauna scris sub forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = F(x, y), \tag{5.48}$$

unde a, b, c, F: $D_2 \to \mathbb{R}$ și vom presupune $a, b, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, c, F \in C^0(D_2)$.

Caracteristicile ecuației (5.48) sînt dreptele paralele cu axele de coordonate $x = c_1$, $y = c_2$, ceea ce face ca prin fiecare punct din D_2 să treacă cîte două caracteristici ale ecuației date; conform cu teoria generală (vezi 1.2), curba γ din condițiile inițiale (5.47) nu trebuie să fie pe nici o porțiune a sa paralelă la axele de coordonate (ceea ce se întîmplă dacă γ este strict monotonă) iar direcția l nu trebuie să fie tangentă la γ. Introducînd operatorul diferențial

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\,u, \tag{5.49}$$

ecuația (5.48) se transcrie

$$Lu = F;$$

operatorul formal adjunct corespunzător lui L va fi

$$L^+v = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}[a(x,y)v] - \frac{\partial}{\partial y}[b(x,y)v] + c(x,y)\,v$$

Cu ajutorul lui L și L^+ se obține identitatea lui Lagrange

$$vLu - uL^+v = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

unde

$$M = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv, \tag{5.49}$$

$$N = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv,$$

Din identitatea lui Lagrange se obține identitatea lui Green, care în cazul de față se scrie

$$\iint_{G_2}(vLu - uL^+v)\,dx\,dy = \int_{\partial G_2} M\,dy - N\,dx, \tag{5.50}$$

unde G_2 este orice subdomeniu din D_2 având frontiera netedă pe porțiuni. Metoda Riemann pleacă de la identitatea (5.50) prin alegerea convenabilă a funcției v și a domeniului G_2; astfel, v va fi *funcția lui Riemann* atașată ecuației (5.48), definită prin condițiile I — IV :

I $v : D_2 \times D_2 \to \mathbb{R}$; $v = v(x, y; \xi, \eta)$ iar $L^+v = 0$ în raport cu variabilele x și y.

II. Pe caracteristica $x = \xi$ verifică ecuația

$$\frac{\partial v(\xi, y; \xi, \eta)}{\partial y} - a(\xi, y)v = 0.$$

III. Pe caracteristica $y = \eta$ verifică ecuația

$$\frac{\partial v(x, \eta; \xi, \eta)}{\partial x} - b(x, \eta)\,v = 0.$$

IV. În punctul (ξ, η) satisface condiția de normare

$$v(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1.$$

Asupra existenței acestei funcții vom reveni ulterior, iar acum vom presupune că din condițiile I — IV se determină în mod unic funcția lui Riemann și vom lua în considerare formula lui Green în care u este soluția căutată [a problemei Cauchy (5.46) pentru ecuația (5.48)], v este funcție a lui Riemann determinată prin condițiile I — IV iar G_2 este domeniul definit prin caracteristicile punctului $P \in D_2$ și un arc P_1P_2 al curbei γ. Se obține egalitatea

$$\iint_{G_2} v(x, y; \xi, \eta)\,F(x, y)\,dx\,dy = \int_{\widehat{P_1P_2} \cup \overline{PP_2} \cup \overline{PP_1}} M\,dy - N\,dx, \tag{5.51}$$

deoarece $Lu = F$, $L^+v = 0$, $\partial G_2 = \widehat{P_1P_2} \cup \overline{PP_2} \cup \overline{PP_1}$ și rămîne de calculat integrala curbilinie pe ∂G_2; găsim

$$\int_{\overline{PP_1}} M dy - N dx = -\int_{\overline{PP_1}} N\,dx = \tag{5.52}$$

$$= -\int_{\xi}^{x_1}\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + a\,u\,v\right]dx$$

deoarece pe caracteristica $y = \eta$ avem $dy = 0$ iar

$$\int_{\overline{P_2P}} M dy - N dy = \int_{\overline{P_2P}} M dy = \int_{y_2}^{\eta}\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + buv\right]dy \tag{5.52'}$$

avînd în vedere că pe caracteristica $x = \xi$ avem $dx = 0$ [s-au notat prin (x_1, η) şi (ξ, y_2) coodonatele punctelor P_1 şi respectiv P_2]. Integrînd prin părţi termenul $v\dfrac{\partial u}{\partial x}$ din (5.52) şi termenul $v\dfrac{\partial u}{\partial y}$ din (5.52′), rezultă

$$\int_{\overline{PP_1}} M\,dy - N\,dy = \frac{1}{2}(uv)\Big|_{x=x_1}^{x=\xi} - \int_{x_1}^{\xi} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}(u\,v)\Big|_{x=x_1}^{x=\xi}, \qquad y = \eta,$$

deoarece din condiţia III din definiţia funcţiei lui Riemann pentru $y = \eta$ avem $\dfrac{\partial v}{\partial x} - bv = 0$, iar

$$\int_{\overline{P_2P}} M\,dy - N\,dy = \frac{1}{2}(uv)\Big|_{y=y_2}^{y=\eta} - \int_{y_2}^{\eta} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}(vu)\Big|_{y=y_2}^{y=\eta}, \quad x = \xi$$

(utilizînd condiţia II din definiţia funcţiei lui Riemann). Revenind la egalitatea (5.51), se deduce (deoarece $v(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1$) egalitatea

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[(uv)(P_1) + (uv)(P_2)] - \int_{\overset{\frown}{P_1P_2}} M\,dy - N\,dx +$$

$$+ \iint_{G_2} v\,F\,dx\,dy,$$

numită *formula lui Riemann de rezolvare a problemei Cauchy generale* (5.47) *pentru ecuaţia* (5.48). Este uşor de stabilit că toate elemen-

tele din membrul al doilea al formulei lui Riemann sînt perfect determinate prin condiţiile iniţiale (5.47) şi ecuaţia (5.48). Pentru aceasta este suficient să arătăm că pe arcul $\overset{\frown}{P_1P_2}$ toţi termenii din M şi N sînt cunoscuţi [deoarece $u(P_1)$, $u(P_2)$ sînt egali cu $f(P_1)$, respectiv cu $f(P_2)$ iar produsul vF este de asemenea cunoscut]; or, din (5.49) rezultă că este suficient să arătăm cum se determină $u|_\gamma$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_\gamma$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_\gamma$. Prima condiţie iniţială (5.47) arată că $u|_\gamma = f$ iar (în ipoteza $f \in C^2$)

$$du|_\gamma = df = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\Big|_\gamma. \tag{5.54}$$

În ipoteza că ecuaţia lui γ se scrie $y = \varphi(x) \in C^1(I)$ (φ' avînd acelaşi semn în intervalul I), condiţiile iniţiale (5.47) se transcriu sub forma

$$u(x, y)|_\gamma = u[x, \varphi(x)] = f(x),$$

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial l}\right|_\gamma = \frac{\partial u[x, \varphi(x)]}{\partial x}l_x + \frac{\partial u[x, \varphi(x)]}{\partial y}l_y = g(x),$$

dacă $\mathbf{l} = l_x\mathbf{i} + l_y\mathbf{j}$, $\|\mathbf{l}\| = 1$; a doua condiţie iniţială şi egalitatea (5.54) transcrisă sub forma

$$\frac{\partial u[x, \varphi(x)]}{\partial x} + \frac{\partial u[x, \varphi(x)]}{\partial y}\varphi'(x) = f'(x)$$

permit determinarea derivatelor parţiale $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_\gamma$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_\gamma$ (deoarece determinantul coeficientilor adică $l_x\varphi'(x) - l_y$ este nenul, $\mathbf{l}$ fiind o direcţie exterioară la γ). Cu notaţiile

$$M(x) = \frac{1}{2}\left\{v[x, \varphi(x); \xi, \eta)]\frac{\partial u([x, \varphi(x)]}{\partial y} -\right.$$

$$- u\,[x,\,\varphi(x)]\,\frac{\partial v[x,\varphi(x);\,\xi,\,\eta)]}{\partial y}\Big\} +$$

$$+ a[x,\,\varphi(x)]\,u[x,\,\varphi(x)]\,v\,[x,\,\varphi(x);\,\xi,\,\eta],$$

$$N(x) = \frac{1}{2}\Big\{v\,[x,\,\varphi(x);\,\xi,\,\eta]\,\frac{\partial u[x,\,\varphi(x)]}{\partial x} -$$

$$- u[x,\,\varphi(x)]\,\frac{\partial v[x,\,\varphi(x);\,\xi,\,\eta]}{\partial x}\Big\} +$$

$$+ b[x,\,\varphi(x)]\,u\,[x,\,\varphi(x)]\,v\,[x,\,\varphi(x);\,\xi,\,\eta]$$

formula lui Riemann se transcrie

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\{f(\xi)\,v[\xi,\,\varphi(\xi);\,\xi,\,\eta] + f([\varphi^{-1}(\eta)]\,v[\varphi^{-1}(\eta),\,\eta;\,\xi,\,\eta]\} + \tag{5.53'}$$

$$+ \int_{\varphi^{-1}(\eta)}^{\xi} [N(x) - M(x)\,\varphi'(x)]\,dx + \int_{\varphi^{-1}(\eta)}^{\xi} dx \int_{\varphi(x)}^{\eta} v(x,\,y;\,\xi,\,\eta)\,F(x,\,y)\,dy,$$

ţinînd seama de modul de calcul al integralelor duble.

Exemplu. În cazul *ecuaţiei telegrafiştilor*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + au = F(x,\,y),\quad a \in \mathbb{R},$$

funcţia lui Riemann se poate căuta sub forma

$$v(x,\,y;\,\xi,\,\eta) = h(r),\, r = \sqrt{(x-\xi)\,(y-\eta)}.$$

Condiţia I, $L^+\,v = 0$ se transformă în ecuaţia diferenţială

$$h''(r) + \frac{1}{r}\,h'(r) + 4a\,h(r) = 0$$

a cărei soluţie generală va fi

$$h(r) = A\,J_0(2\sqrt{a}r) + B\,N_0(2\sqrt{a}\,r).$$

Pentru a se verifica egalitatea $v(\xi,\eta;\,\xi,\eta) = 1$, deoarece $J_0(0) = 1$, $|N_0(0)| = \infty$, neapărat $A = 1$, $B = 0$ şi deci

$$v(x,\,y;\,\xi,\,\eta) = J_0\,[2\sqrt{a(x-\xi)\,(y-\eta)}].$$

Cum $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{a(y-\eta)}{\sqrt{a(x-\xi)(y-\eta)}}\cdot J_0'[2\sqrt{a(x-\xi)\,(y-\eta)}]$, se deduce $\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=\eta} = 0$ [deoarece $J_0'(0) = 0$] şi analog $\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=\xi} = 0$, ceea ce coincide cu verificarea condiţiilor II şi III din definiţia funcţiei lui Riemann. Înlocuind în formula lui Riemann (5.53'), se obţine soluţia problemei Cauchy generale pentru ecuaţia în cauză. În particular, dacă $f = 0, g = 0$, găsim

$$u(\xi,\,\eta) = \int_{\varphi^{-1}(\eta)}^{\xi} dx \int_{\eta(x)}^{\xi} J_0\,[2\sqrt{a(x-\xi)\,(y-\eta)}]\,F(x,\,y)\,dy.$$

5.3.2. Existenţa şi unicitatea funcţiei lui Riemann

Utilizînd proprietăţile II, III şi IV ale funcţiei lui Riemann, acestea se pot transcrie sub forma echivalentă

$$v(x,\,y;\,\xi,\,\eta)\,|_{x=\xi} = \exp\left[\int_{\eta}^{y} a(\xi,\,\beta)\,d\beta\right] = \varphi(y),$$

$$v(x,\,y;\,\xi,\,\eta)\,|_{y=\eta} = \exp\left[\int_{\xi}^{x} b(\alpha,\,\eta)\,d\alpha\right] = \psi(x);$$

prin urmare, funcţie lui Riemann este soluţia ecuaţiei $L^+v = 0$ care care verifică condiţii prescrise pe caracteristicile ecuaţiei date şi de

aceea, dacă vom demonstra că orice ecuaţie cu derivate parţiale de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = h\left[x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right] \tag{5.54}$$

admite o singură soluţie (în vecinătatea originii) astfel încît

$$u(x, y)|_{x=0} = \varphi(y),\ u(x, y)|_{y=0} = \psi(x), \tag{5.55}$$

atunci va fi demonstrată şi existenţa (locală) a funcţiei lui Riemann.

O problemă de forma condiţiilor (5.55) pentru ecuaţia (5.54) se numeşte *problemă Darboux* şi în (5.55), evident trebuie să avem $\varphi(0) = \psi(0)$ $(= u(0, 0))$ iar existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Darboux în discuţie se poate obţine uşor cu ajutorul principiului contracţiei. Pentru acesata, integrînd ecuaţia (5.54) o dată în raport cu variabila x şi apoi în raport cu variabila y şi ţinînd seama de (5.55), se deduce egalitatea

$$u(x, y) = \varphi(y) + \psi(x) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y h\left[\alpha, \beta, u(\alpha, \beta), \frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial \beta}\right] d\alpha\, d\beta \tag{5.56}$$

(valabilă în ipoteza existenţei soluţiei u) care arată că este suficient să arătăm că operatorul

$$Tu = \varphi(y) + \psi(x) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y h\left[\alpha, \beta, u(\alpha, \beta), \frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial \beta}\right] d\alpha\, d\beta$$

admite un punct fix într-o mulţime convenabilă de funcţii.

Fie $S = \{u \mid u \in C^1(\overline{V}_0)\}$, unde V_0 este o vecinătate convenabilă a originii şi să presupunem S înzestrat cu o structură de spaţiu metric, unde distanţa este definită prin

$$d(u, v) = \max\left\{\sup|u - v|, \sup\left|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right|, \sup\left|\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right|\right\},$$

supremul fiind calculat în $\overline{V}_0$; dacă în plus h este continuă pentru $(x, y) \in \overline{V}_0$ şi $\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \in \mathbb{R}^3$ iar în raport cu ultimele trei variabile este lipschitziană. adică

$$|h(x, y, u_1, p_1, q_1) - h(x, y, u_2. p_2, q_2)| \leqslant$$

$$\leqslant M(|u_1 - u_2| + |p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|),$$

este uşor de verificat că T aplică mulţimea S în ea însăşi şi defineşte o contracţie. Va rezulta

$$|Tu_1 - Tu_2| \leqslant \int_0^{|x|} \int_0^{|y|} |h(\alpha, \beta, u_1, p_1, q_1) - h(\alpha, \beta, u_2, p_2, q_2)|\, d\alpha\, d\beta \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^{|x|} \int_0^{|y|} (|u_1 - u_2| + |p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|)\, d\alpha\, d\beta \leqslant$$

$$\leqslant 3M\, d(u_1, u_2)\, |x|\, |y)|$$

[cu notaţiile $p_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}$, $q_1 = \frac{\partial x}{\partial y}$, $p_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x}$, $q_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}$ şi deci $|u_1 - u_2| \leqslant d(u_1, u_2)$, $|p_1 - q_1| \leqslant d(u_1, u_2)$, $|q_1 - q_2| \leqslant d(u_1, u_2)$]; ana-

$$\log\left|\frac{\partial(Tu_1)}{\partial x} - \frac{\partial(Tu_2)}{\partial x}\right| \leqslant \int_0^{|x|} |h(x, \beta, u_1, p_1, q_1) - h(x, \beta, u_2, p_2, q_2)|\, d\beta \leqslant$$

$$\leqslant 3Md(u_1, u_2)\, |y|, \left|\frac{\partial(Tu_1)}{\partial y} - \frac{\partial(Tu_2)}{\partial y}\right| \leqslant \int_0^{|x|} |h(\alpha, y, u_1, p_1, q_1) -$$

$$- h(\alpha, y, u_2, p_2, q_2)|\, d\alpha \leqslant 3M\, d(u_1, u_2)\, |x|$$

şi este evident că $d(Tu_1, Tu_2) \leqslant qd(u_1, u_2)$, $0 < q < 1$, pentru $|x|$, $|y|$ suficient de mici (ceea ce revine la alegerea convenabilă a vecinătăţii V_0). Aşadar, va exista un singur element $u \in S$ astfel încît $u = Tu$; cum $u \in C^1(V_0)$, din (5.56) rezultă imediat existenţa derivatei

mixte $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ (care, fiind egală cu $h\left[x,\ y,\ u(x,y),\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]$, va fi o funcție continuă în V_0) iar $u(x,y)|_{x=0} = \varphi(y)$, $u(x,y)|_{y=0} = \psi(x)$.

Din rezultatul anterior se deduce ușor existența (locală) și unicitatea funcției lui Riemann, deoarece se poate presupune că rolul originii este jucat de punctul (ξ, η).

5.3.3. Proprietatea de reciprocitate a funcției lui Riemann

Vom arăta acum că funcția lui Riemann $v = v(x, y;\ \xi, \eta)$ considerată ca funcție de variabilele ξ și η este funcția lui Riemann pentru ecuația $L^+u = G$, unde L^+ este operatorul formal adjunct al operatorului L.

Din condiția I (din 5.3.1) se deduce că fucția lui Riemann pentru ecuația $L^+ v = G$ va verifica ecuația $L^{++}u = Lu = 0$ (deoarece $L^{++} = L$) și de aceea vom scrie funcția lui Riemann sub forma

$$u = u(x, y;\ x_1, y_1),$$

(x_1, y_1) fiind coordonatele unui punct $Q \in D_2$; utilizînd caracteristicile punctelor P și Q se obține dreptunghiul $PP_1\,QP_2$. Vom scrie identitatea lui Green (5.50) pentru perechea (u, v), unde $u = u(x, y;\ x_1, y_1)$ este funcția lui Riemann pentru ecuația $L^{++}v = G$ iar $v = v(x, y;\ \xi, \eta)$ este funcția lui Riemann pentru ecuația $Lu = F$, și în ipoteza că domeniul de integrare este un dreptunghi. Cum $Lu = 0$, $L^+ v = 0$, se deduce

$$-\int_{\overline{PP_1}} N\,dx + \int_{\overline{P_1Q}} M\,dy - \int_{\overline{QP_2}} N\,dx + \int_{\overline{P_2P}} M\,dy = 0;$$

calculînd fiecare integrală în parte, deoarece pe caracteristica PP_1 și PP_2 avem

$$\frac{\partial v}{\partial x} - bv = 0, \qquad y = \eta,$$

respectiv

$$\frac{\partial v}{\partial y} - av = 0, \qquad x = \xi,$$

iar pe caracteristicile QP_1 și QP_2 avem

$$\frac{\partial u}{\partial y} + au = 0, \qquad x = x_1,$$

respectiv

$$\frac{\partial u}{\partial x} + bu = 0, \qquad y = y_1,$$

rezultă egalitatea

$$u(\xi, \eta;\ x_1, y_1) = v(x_1, y_1;\ \xi, \eta)$$

care justifică propoziția enunțată anterior.

5.3.4. Sinteza formulei lui Riemann

Pe baza concluziilor anterioare se poate verifica ușor că formula lui Riemann (5.53), în ipoteze convenabile asupra coeficienților a, b și c și ale datelor problemei (adică asupra funcțiilor f, g și F), definește efectiv soluția problemei Cauchy (5.47) pentru ecuația (5.48).

Pentru simplitatea calculelor se poate presupune $f = 0$, $g = 0$, deoarece o transformare de forma

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y),$$

unde $w \in C^2(D_2)$ este astfel încît

$$w(x, y)|_\gamma = f, \quad \frac{w(x, y)}{\partial l}\bigg|_\gamma = g,$$

face ca noua funcție necunoscută v să verifice condițiile inițiale omogene $\left(v|_\gamma = 0,\ \frac{\partial v}{\partial l}\Big|_\gamma = 0\right)$ și ecuația $Lv = F_1$, cu $F_1 = F - Lw$. Or, dacă $f = 0$, $g = 0$, formula lui Riemann se scrie (cu x și y în loc de ξ respectiv η):

$$u(x, y) = \int_{\varphi^{-1}(y)}^{x} d\alpha \int_{\varphi(\alpha)}^{y} v(\alpha, \beta;\ x, y)\ F(\alpha, \beta)\,d\beta =$$

$$= \int_{\varphi(x)}^{y} d\beta \int_{\varphi^{-1}(\beta)}^{x} v(\alpha, \beta;\ x, y)\ F(\alpha, \beta)\,d\alpha$$

și trebuie arătat că $Lu = F$ iar $u|_\gamma = u[x,\ \varphi(x)] = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_\gamma = 0.$

Deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{\varphi(x)}^{y} v(x, \beta;\ x, y)\, F(x, \beta)\, d\beta +$$

$$+ \int_{\varphi^{-1}(y)}^{x} d\alpha \int_{\varphi(\alpha)}^{y} \frac{\partial v(\alpha, \beta;\ x, y)}{\partial x} F(\alpha, \beta) d\beta =$$

$$= \int_{\varphi(x)}^{y} v(x, \beta;\ x, y)\ F(x, \beta)\, d\beta + \int_{\varphi(x)}^{y} d\beta \int_{\varphi^{-1}(\beta)}^{x} \frac{\partial v(\alpha, \beta;\ x, y)}{\partial x} F(\alpha, \beta)\, d\alpha,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{\varphi^{-1}(y)}^{x} v(\alpha, y;\ x, y)\, F(\alpha, y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\varphi(x)}^{y} d\beta \int_{\varphi^{-1}(\beta)}^{x} \frac{v(\alpha, \beta; x, y)}{\partial y} F(\alpha, \beta)\, d\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = F(x, y) + \int_{\varphi^{-1}(y)}^{x} \frac{\partial v(\alpha, y;\ x, y)}{\partial x} F(\alpha, y) d\alpha +$$

$$+ \int_{\varphi(x)}^{y} d\beta \int_{\varphi^{-1}(\beta)}^{x} \frac{\partial^2 v(\alpha, \beta;\ x, y)}{\partial x \partial y} F(\alpha, \beta)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\varphi(x)}^{y} \frac{\partial v(x, \beta;\ x, y)}{\partial y} F(x, y)\, d\beta,$$

se deduce

$$Lu(x, y) = F(x, y) + \int_{\varphi(x)}^{y} \left[\frac{\partial v(x, \beta;\ x, y)}{\partial y} + a\ (x, y)\ v(x, \beta;\ x, y)\right] \times$$

$$\times F(x, \beta)\, d\beta + \int_{\varphi^{-1}(y)}^{x} \left[\frac{\partial v(x, y;\ x, y)}{\partial x} + b(x, y)\ v(\alpha; x, y)\right] F(\alpha, y) d\alpha +$$

$$+ \iint_{G_2} \left[\frac{\partial^2 v(\alpha, \beta;\ x, y)}{\partial x\, \partial y} + a(x, y) \frac{\partial v(\alpha, \beta;\ x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{v(\alpha, \beta;\ x, y)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + c(x, y)\ v(\alpha, \beta;\ x, y)\right] F(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = F(x, y),$$

deoarece fiecare integrală în parte este nulă în baza proprietăților funcției lui Riemann (în raport cu ultimele două variabile). Deoarece este evident că $u(x, y)|_{y=\varphi(x)} = 0,\ \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right|_{y=\varphi(x)} = 0,\ \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=\varphi)x)} = 0$ $\left(\text{deci } \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_\gamma = 0\right)$, condițiile inițiale vor fi verificate.

Este evident că dacă $f \in C^2(\gamma)$, $g \in C^1(\gamma)$, $F \in C^0(D_2)$, atunci u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ și $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ vor fi funcții continue în vecinătatea curbei γ în plus, se poate obține inegalitatea $(|u(x, y) - u_1(x, y)| < \varepsilon$ dacă $|f - f_1| < \delta,\ |f' - f_1' < |\ \delta,\ |g - g_1| < \delta\ |F - F_1| < \delta$ (u fiind soluția corespunzătoare datelor f, g și F, iar u_1 este soluția corespunzătoare datelor f_1, g_1 și F_1), ceea ce constituie *stabilitatea* soluției problemei Cauchy (5.47) pentru ecuația (5.48).

De asemenea, deoarece în general u depinde de valorile lui f și g pe întreg aroul P_1P_2, principiul lui Huygens nu va fi valabil pentru ecuația $Lu = 0$ decît în cazuri particulare (dacă forma diferențială $M dy - N dx$ este exactă pentru orice date inițiale f și g); se verifică iarăși cu ușurință cu liniile caracteristice $x = \xi$, $y = \eta$ sînt singurele linii posibile de discontinuitate pentru soluțiile problemei studiate.

Exerciții

1°. Să se arate că funcția lui Riemann pentru ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{4(x - y)^2} u = 0$$

este $v(x, y; \xi, \eta) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z\right)$, $z = \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-y)(\xi-\eta)}$.

2°. Să se rezolve problema Cauchy $u\Big|_{y=x} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=x} = g(x)$ pentru ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a(y)\frac{\partial u}{\partial x} = F(x, y)$$

sau pentru ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + b(x)\frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y).$$

R. În primul caz funcția lui Riemann va fi $v(x, y; \xi, \eta) = \exp\left(\int_\eta^y a(t)\,dt\right)$ iar în al doilea caz, $v(x, y; \xi, \eta) = \exp\left(\int_\xi^x b(t)dt\right)$.

3°. Să se determine funcția lui Riemann pentru ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a(y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x)\frac{\partial u}{\partial y} + a(y)\,b(u)u = F(x, y).$$

R. $v(x, y; \xi, \eta) = \exp\left[\int_\xi^x b(t)\,dt + \int_\eta^y a(t)\,dt\right]$.

4°. Să se arate că soluția problemei Darboux

$$u(t, x)\Big|_{x+at=1} = f(x),\ u(t, x)\Big|_{x-at=2} = g(x), \quad \left[f\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

pentru ecuația

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

este

$$u(t, x) = f\left(\frac{x-at+1}{2}\right) + g\left(\frac{x+at+2}{2}\right) - f\left(\frac{3}{2}\right).$$

5°. Să se arate că soluția problemei Darboux

$$u(t, x)\Big|_{x=2\sqrt{y}} = f(x),\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\ u(t, x)\Big|_{x+2\sqrt{y}=1} = g(x),\ \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,$$

pentru ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad y > 0$$

va fi

$$u(x, y) = f\left(\frac{x}{2} + \sqrt{y}\right) + g\left(\frac{x+1}{2} - \sqrt{y}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Postfață

Cele trei volume din Teoria ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale, *tipărite de Editura tehnică, au avut drept scop prezentarea elementelor de bază ale teoriei acestor ecuații. Au fost luate în discuție aspecte atît clasice cît și moderne ale acestei teorii, materialul fiind conceput în mod unitar prin analizarea în amănunt atît a fundamentelor teoriei clasice relative la integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale de primul și al doilea ordin, locul central ocupîndu-l rezolvarea problemei Cauchy, la care se dau diverse metode de construcție a soluțiilor, cît și a unora din aspectele moderne curente ale acestei teorii.*

Aspectele teoretice urmăresc fundamentarea ideii care stă la baza construcției celor trei volume și anume de a prezenta unele modele matematice de tip diferențial, modele luate din diverse discipline, în special din fizică. Este acordat un loc deosebit noțiunii de soluție slabă pentru ecuații cu derivate parțiale liniare : acest fapt este justificat atît de direcțiile de dezvoltare actuale ale matematicii legate de teoria ecuațiilor cu derivate parțiale cît și de practica inginerească ; este suficient a se aminti că metoda elementului finit, una din metodele de importanță majoră în teoria modernă a calculului numeric, se bazează, nu pe ideea de soluție clasică pentru ecuații cu derivate parțiale ci pe ideea de soluție slabă a acestora, legată de tratarea variațională a problemelor la limită. Marile avantaje ale utilizării conceptului de soluție slabă sînt date explicit fapt ce face ca prezentarea teoriei ecuațiilor cu derivate parțiale să se întrepătrundă cu analiza funcțională, teoremele de bază ale acesteia asigurînd existența, unicitatea, dependența de date etc. a soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale.

Noțiunea de soluție slabă se utilizează în teoria problemelor la limită, fundamentîndu-se metoda separării variabilelor, care este dificil de fundamentat în cadrul clasic ; cu acest prilej se justifică considerațiile expuse anterior, problemele efective luate în discuție rezolvîndu-se cu ajutorul acestor elemente. Ne referim la teoria funcțiilor speciale (polinoame ortogonale, funcții Bessel etc.) care își găsesc astfel cadrul natural de utilizare efectivă.

Autorii speră că prin parcurgerea acestor trei volume, teoria generală a ecuațiilor cu derivate parțiale devine mai accesibilă, putîndu-se constata ușor și direct care au fost progresele realizate în ultimii ani în această teorie.

BIBLIOGRAFIE

1. Berezovskii, A. A. *Lekții po nelineinim zadaceam matematiceskoi fiziki, ceasti* 1, 2, Kiev, Naukova Dumka, 1976.
2. Ghelfand, I. M., Șilov, G. E. *Obobșcionnîe funkții i deistviia nad nimi*, 1, 2. Moscova, G.I.F.M.L. 1958.
3. John, F. *Partial Differential Equations.* New York-Heidelberg-Berlin, Springer Verlag 1971.
4. Leis, R. *Vorlesungen über Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Bibl. Inst Mannheim, 1967.
5. Maurin, K. *Metods of Hilbert Spaces.* Warszawa, PWN, 1967.
6. Teodorescu, N., Olariu, V. *Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale*, vol. 1,2, Editura tehnică, 1978, 1979.

Redactor: **Valentina Crețu**
Tehnoredactor: **Elena Geru**
Coperta: **Teodora Doxan**

Bun de tipar: 26.06.1980. Coli de tipar 26. C.Z. 517.944/947

C. 515 — I. P. „INFORMAȚIA"
Str. Brezoianu Nr. 23—25
București